Teil F

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Literaturhinweise I

Peter Hartmann,
Mathematik für Informatiker. 3. überarbeitete Auflage, 2004, Vieweg.
Bei Lehmann's vorhanden, ca. 30€.
Gute Grundlage, äusserst lesbar, nicht unbedingt an Eliteuniversitäten orientiert. ISBN: 3-528-23181-5

Lothar Sachs,
Angewandte Statistik 10, 2002, Springer.

Ulrich Krengel,
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik 6, 2002, Vieweg.

F - 1 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

Wir betrachten folgendes Experiment: Eine Münze wird geworfen. Das Ergebnis sei entweder „Kopf" oder „Zahl". Der Ausgang eines solchen Experimentes ist nicht exakt vorraussagbar. Man müßte ein exaktes physikalisches *Modell* und alle nötigen Parameter, Anfangs- und Randdaten haben, was aber unmöglich ist.

Im betrachteten Fall sprechen wir von einem **Zufallsexperiment**. Die **Wahrscheinlichkeitstheorie** analysiert Gesetzmäßigkeiten solcher Zufallsexperimente.

Jeder hat eine gewisse Vorstellung von der Aussage: „Bei einer fairen Münze ist die **Wahrscheinlichkeit** für ‚Kopf' genauso groß wie für ‚Zahl'."

Intuitiv denkt man dabei etwa: „Wenn man die Münze oft (hintereinander) wirft, so konvergiert die **relative Häufigkeit** von ‚Kopf' (von ‚Zahl') gegen 1/2." Eine Definition der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der relativen Häufigkeiten ist im Allgemeinen jedoch problematisch.

Beispiel F.1 (Experiment: Zweimaliges Würfeln)

Die Menge aller möglichen Kombinationen ist

$$\Omega := \{(i,j) | 1 \le i,j \le 6\}.$$

Also gibt es $|\Omega| = 36$ mögliche Ausgänge des Experimentes. Bei einem sogenannten **fairen Würfel** sind alle diese Ausgänge (**Elementarereignisse**) gleichwahrscheinlich. Z.B. geschieht das Ereignis $\{(1,2)\}$ = „erst 1, dann 2" mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/36. Das Ereignis „Summe der Augenzahlen ist höchstens 3" entspricht der Menge $A := \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. Es gilt also $|A| = 3$ und somit ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis gleich $3/36 = 1/12$.

Elementare Definitionen

Definition F.2 (Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei Ω eine nicht-leere endliche Menge, also $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ deren Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von Ω.

1. Eine **Wahrscheinlickeitsverteilung** (oder auch ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**) auf Ω ist eine Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:
$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1, \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \quad \text{für } A \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$
Die Menge Ω nennen wir **Ergebnismenge** oder auch **Ergebnisraum**.
2. Teilmengen $A \subset \Omega$ heißen **Ereignisse**, $P(A)$ heißt **Wahrscheinlichkeit von** A.
3. Eine Menge $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ heißt **Elementarereignis**.
4. Das Paar (Ω, P) heißt **Wahrscheinlichkeitsraum** (genauer: endlicher Wahrscheinlichkeitsraum).
5. Wir nennen Ω das **sichere Ereignis** und $\emptyset$ das **unmögliche Ereignis**.

Bemerkung:

(Wahrscheinlichkeitsmaß als Voraussage)
Auch wenn wir hier, wie angekündigt, mathematisch vorgehen und Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen durch eine abstrakt gegebene Funktion P definieren, ohne dies weiter zu erklären, sollte jeder eine intuitive Vorstellung von Wahrscheinlichkeit haben. Das Wahrscheinlichkeitsmaß können wir auch als **Voraussage** über die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes interpretieren. Eine solche Sichtweise wird z.B. das Verständnis des Begriffes der *bedingten Wahrscheinlichkeit* unterstützen.

Satz F.3 (Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes)

Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Es gilt:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$, wobei $A^c = \Omega \backslash A$ das **Komplement** von A ist. Speziell gilt $P(\emptyset) = 0$.
2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
3. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.
4. Falls $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind, d.h. für $i \neq j$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$, dann gilt $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Speziell gilt $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.
5. Für beliebige (i.a. nicht paarweise disjunkte) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definition F.4 (Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum)

Sei (Ω, P) endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Falls alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, heißt P **Gleichverteilung**, und (Ω, P) heißt **Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum**. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{1}{|\Omega|} \quad \text{für alle } \omega \in \Omega, \\ P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{für } A \subset \Omega, \end{aligned}$$

wobei $|\Omega|$, $|A|$ die Anzahl der Elemente in Ω bzw. A ist.

Beispiel F.5 („6 Richtige im Lotto 6 aus 49“)

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 6 bestimmte Zahlen (der eigene Tipp) zufällig als Gewinnzahlen gezogen werden, auf zwei verschiedene Weisen. Unser Tipp bestehe aus den sechs verschiedenen Zahlen $t_1, \dots, t_6$.
1. Als Ergebnismenge Ω_1 nehmen wir hier die Menge aller *sechs-elementigen Teilmengen* der Menge $\{1, \dots, 49\}$. Wir unterscheiden also nicht, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen werden.

$$\begin{aligned}\Omega_1 \;&=\; \{\{w_1, \dots, w_6\} | w_i \in \{1, \dots, 49\} \text{ für alle } 1 \leq i \leq 6 \\ &\quad \text{und } w_i \neq w_j \text{ für } i \neq j \text{ und } 1 \leq i, j \leq 6\}\end{aligned}$$

Die Anzahl dieser Teilmengen ist $|\Omega_1| = \binom{49}{6} = 13983816$.
Jede Ziehung (jedes Elementarereignis) habe den gleichen Wahrscheinlichkeitswert, insbesondere auch das Elementarereignis $A_1 := \{t_1, \dots, t_6\}$, das unserem Tipp entspricht. Also

$$P_1(A_1) = \frac{1}{|\Omega|} \approx 7.1511 \cdot 10^{-8}.$$

2. Jetzt nehmen wir als Elementarereignisse alle *Sechsertupel* von paarweise verschiedenen ganzen Zahlen zwischen 1 und 49. Es kommt also auf die Reihenfolge bei der Ziehung an. Z.B. sind die Tupel $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ und $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$ voneinander verschieden.

$$\begin{aligned}\Omega_2 \;&=\; \{(w_1, \dots, w_6) | w_i \in \{1, \dots, 49\}, \text{für alle } 1 \leq i \leq 6, \\ &\quad w_i \neq w_j \text{für } i \neq j \text{ und } 1 \leq i, j \leq 6\}\,.\end{aligned}$$

Die Anzahl solcher Sechsertupel ist

$$|\Omega_2| \;=\; 49 \cdot 48 \cdots 44 = \frac{49!}{43!}.$$

Das Ereignis „6 Richtige“ entspricht der Menge

$$A_2 := \{(\omega_1, \dots, \omega_6) \,|\, \{\omega_1, \dots, \omega_6\} = \{t_1, \dots, t_6\}\}.$$

Die Menge A_2 besteht also gerade aus allen Sechsertupeln, die aus $(t_1, \dots, t_6)$ durch Permutation hervorgehen. Für den Lottogewinn ist es ja egal, in welcher Reihenfolge die Gewinnzahlen gezogen werden. Es gilt also $|A_2| = 6!$. Wir erhalten also

$$P_2(A_2) \;=\; \frac{|A_2|}{|\Omega_2|}$$

Beispiel F.6 (Dreimal Würfeln mit Laplace-Würfel)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine Wiederholung vorkommt? Wir wählen

$$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) \,|\, \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ für } 1 \leq i \leq 3\}$$

als Ergebnismenge. Die Anzahl aller möglichen Elementarereignisse (Dreiertupel) ist 6^3. Das Ereignis „keine Wiederholung“ entspricht der Menge A aller Dreiertupel, in denen alle drei Zahlen verschieden sind. Es gibt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$ solche Dreiertupel. Also ist

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

Satz F.7

Die Elemente einer Menge mit n Elementen lassen sich auf genau $n!$ verschiedene Arten anordnen.

Satz F.8

Aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen lassen sich k Elemente (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auf

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Arten auswählen.

Satz F.9

Aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen lassen sich k Elemente (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) auf

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Arten auswählen.

Satz F.10

Das Urnenexperiment 'Ziehen ohne Zurücklegen': In einer Urne befinden sich N Kugeln, S Schwarze und W weiße, wobei $S + W = N$ ist. Aus der Urne werden nacheinander zufällig n Kugeln gezogen, davon seien n_s Kugeln schwarz und n_w Kugeln weiß. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau n_s schwarze und n_w weiße Kugeln zu ziehen gleich

$$P(\text{Anzahl schwarze Kugeln} = n_s) = \binom{S}{n_s} \cdot \binom{W}{n_w} / \binom{N}{n}.$$

Satz F.11

Das Urnenexperiment 'Ziehen mit Zurücklegen': In einer Urne befinden sich N Kugeln, S Schwarze und W weiße, wobei $S + W = N$ ist. Aus der Urne werden zufällig n Kugeln gezogen, nach jedem Zug wird die Kugel wieder zurückgelegt. Es werden n_s schwarze und n_w weiße Kugeln gezogen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, genau n_s schwarze und n_w weiße Kugeln zu ziehen gleich

$$P(\text{Anzahl schwarze Kugeln} = n_s) = \binom{n}{n_s} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)^{n_s} \cdot \left(\frac{W}{N}\right)^{n_w}.$$