

Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel F.17 (für zwei unabhängige Ereignisse)

Wir betrachten folgendes Experiment: Es wird zweimal mit einem Laplace-Würfel gewürfelt. Wir betrachten das Ereignis A , dass die „Summe der Augenzahlen gerade“ und Ereignis B , dass der „zweite Wurf eine 1“ ist. Es gilt $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$, wie man durch Abzählen der jeweiligen Mengen sieht. Also

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A).$$

D.h. durch die zusätzlichen Informationen, dass B eintritt, ändert sich nichts an der (bedingten) Wahrscheinlichkeit dafür, dass A eintritt.

Definition F.18 (Unabhängigkeit zweier Ereignisse)

Zwei Ereignisse A und B heißen **voneinander unabhängig**, wenn die **Produktformel**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.

- 229 -

Definition F.19

(Unabhängigkeit einer Familie von Ereignissen)

Sei $\{A_i, i \in J\}$ eine endliche Familie von Ereignissen.

1. Wir sagen, dass die **Produktformel** für $\{A_i, i \in J\}$ gilt, wenn

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

2. Wir sagen, dass eine (nicht unbedingt endliche) Familie $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ von Ereignissen **unabhängig** ist, wenn für jede endliche Teilfamilie $\{A_i, i \in J\}$ mit $J \subset I$ die Produktformel gilt.

- 231 -

Bemerkung

1. Die Relation „ A ist unabhängig von B “ ist *symmetrisch*, d.h. „ A ist unabhängig von B “ genau dann, wenn „ B unabhängig von A “ ist. Aber im allgemeinen ist sie nicht *reflexiv* (für $0 < P(A) < 1$ gilt z.B. , dass $P(A \cap A) = P(A) \neq P(A) \cdot P(A)$) oder *transitiv* (aus „ A ist unabhängig von B “ und „ B ist unabhängig von C “ folgt i.a. *nicht*, dass „ A unabhängig von C “ ist, wie man für die Wahl eines Beispiels mit $A = C$ mit $0 < P(A) < 1$ und $B = \emptyset$ sieht.) 2. Ebenso ist die Nicht-Unabhängigkeit zweier Ereignisse nicht transitiv. Als Gegenbeispiel betrachten wir den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum (vgl. Definition F.4), bestehend aus $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ und der Verteilung $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ für jedes $\omega \in \Omega$ sowie die Ereignisse $A := \{1, 2\}$, $B := \{1\}$ und $C := \{1, 3\}$. Man rechnet leicht nach, dass A nicht unabhängig von B und B nicht unabhängig von C ist. Allerdings ist A unabhängig von C .

- 230 -

Produktexperimente

Definition F.20 (Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen)

Die Menge

$$\begin{aligned} \Omega &= \prod_{i=1}^n \Omega_i = \Omega_1 \cdots \Omega_n \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (3)$$

heißt das **(kartesische) Produkt** oder auch die **Produktmenge** von $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$. Durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^n P_i(\omega_i) \quad (4)$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert, das wir ebenfalls mit P bezeichnen. Wir nennen (Ω, P) das **Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume** $(\Omega_i, P_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- 232 -

Satz F.21

(Eindeutigkeit des Produkts von Wahrscheinlichkeitsräumen)

1. Durch (4) ist tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert.
2. Sei X_i die i -te Koordinatenfunktion auf Ω , d.h. $X_i(\omega) = \omega_i$. Dann gilt für $A_i \in \Omega_i (i = 1, \dots, n)$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P_i(A_i). \quad (5)$$

Hierbei folgende Notation für als Urbild definierte Mengen:

$$\{X_i \in A_i\} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid X_i(\omega) = \omega_i \in A_i\}.$$

Insbesondere gilt dann

$$P(\{X_n \in A_k\}) = P_k(A_k) \text{ für alle } 1 \leq k \leq n. \quad (6)$$

3. Das durch (4) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß ist das einzige Maß auf Ω , bezüglich dessen jede Mengenfamilie $(\{X_i \in A_i\})_{1 \leq i \leq n}$ unabhängig ist und für die (6) gilt.

- 233 -

Definition F.23 (Bernoulli-Verteilung)

Der in Beispiel F.22 betrachtete Produktraum (Ω, P) heißt **Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p** , und P heißt **Bernoulli-Verteilung**.

Beispiel F.24 (Binomialverteilung)

Wir führen Beispiel F.22 fort. Sei für $0 \leq k \leq n$ mit E_k das Ereignis bezeichnet, dass genau k -mal ein Erfolg (eine 1) eintritt. Es gibt genau $\binom{n}{k}$ solcher $\omega \in \Omega$. Also

$$P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k). \quad (8)$$

- 235 -

Beispiel F.22 (n-facher Münzwurf)

Wir betrachten eine Folge von n unabhängigen Einzelexperimenten, die jeweils durch die Ergebnismenge $\Omega_i = \{K, Z\}$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_i(\omega_i) = \begin{cases} p & \text{für } \omega_i = K, \\ 1-p & \text{für } \omega_i = Z, \end{cases}$$

(mit $1 \leq i \leq n$) beschrieben sind. Hierbei ist $0 \leq p \leq 1$. Die Produktmenge ist

$$\Omega = \{0, 1\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{K, Z\}, 1 \leq i \leq n\},$$

und das Wahrscheinlichkeitsmaß ist gegeben durch seine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^n P_i(\omega_i) = p^k (1-p)^{n-k}, \quad (7)$$

wobei k die Anzahl der Indizes i mit $\omega_i = 1$ ist.

- 234 -

Wir überprüfen durch eine kurze Rechnung, dass die Summe der $P(E_k)$ gleich 1 ist:

$$\sum_{k=0}^n b_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die binomische Formel verwendet.

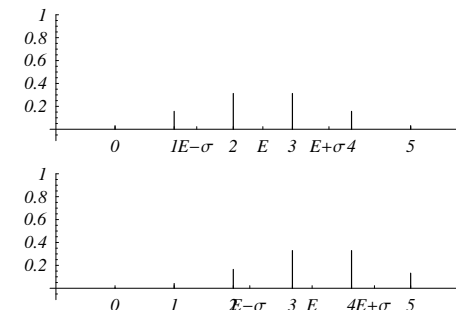


Abbildung: Stabdiagramme für die Binomialverteilungen $b_{5, \frac{1}{2}}$ und $b_{5, \frac{2}{3}}$.

- 236 -