# Unabhängigkeit von Ereignissen

## Beispiel F.17 (für zwei unabhängige Ereignisse)

Wir betrachten folgendes Experiment: Es wird zweimal mit einem Laplace-Würfel gewürfelt. Wir betrachten das Ereignis $A$, dass die „Summe der Augenzahlen gerade" und Ereignis B, dass der „zweite Wurf eine 1" ist. Es gilt $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{12}$, wie man durch Abzählen der jeweiligen Mengen sieht. Also

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A).$$

D.h. durch die zusätzlichen Informationen, dass $B$ eintritt, ändert sich nichts an der (bedingten) Wahrscheinlichkeit dafür, dass $A$ eintritt.

## Definition F.18 (Unabhängigkeit zweier Ereignisse)

Zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißen **voneinander unabhängig**, wenn die **Produktformel**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

gilt.





## Bemerkung

1. Die Relation „$A$ ist unabhängig von $B$" ist *symmetrisch*, d.h. „$A$ ist unabhängig von $B$" genau dann, wenn „$B$ unabhängig von $A$" ist. Aber im allgemeinen ist sie nicht *reflexiv* (für $0 < P(A) < 1$ gilt z.B. , dass $P(A \cap A) = P(A) \neq P(A) \cdot P(A)$) oder *transitiv* (aus „$A$ ist unabhängig von $B$" und „$B$ ist unabhängig von $C$" folgt i.a. *nicht*, dass „A unabhängig von C" ist, wie man für die Wahl eines Beispiels mit $A = C$ mit $0 < P(A) < 1$ und $B = \emptyset$ sieht.) 2. Ebenso ist die Nicht-Unabhängigkeit zweier Ereignisse nicht transitiv. Als Gegenbeispiel betrachten wir den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum (vgl. Definition F.4), bestehend aus $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ und der Verteilung $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ für jedes $\omega \in \Omega$ sowie die Ereignisse $A := \{1, 2\}$, $B := \{1\}$ und $C := \{1, 3\}$. Man rechnet leicht nach, dass $A$ nicht unabhängig von $B$ und $B$ nicht unabhängig von $C$ ist. Allerdings ist $A$ unabhängig von $C$.





## Definition F.19

**(Unabhängigkeit einer Familie von Ereignissen)**

Sei $\{A_i, i \in J\}$ eine endliche Familie von Ereignissen.

1. Wir sagen, dass die **Produktformel** für $\{A_i, i \in J\}$ gilt, wenn

$$P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

2. Wir sagen, dass eine (nicht unbedingt endliche) Familie $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ von Ereignissen **unabhängig** ist, wenn für jede endliche Teilfamilie $\{A_i, i \in J\}$ mit $J \subset I$ die Produktformel gilt.





# Produktexperimente

## Definition F.20 (Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen)

Die Menge

$$\begin{aligned} \Omega &= \prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega_1 \cdots \Omega_n \qquad (3) \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \,|\, \omega_i \in \Omega_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

heißt das **(kartesische) Produkt** oder auch die **Produktmenge** von $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq n}$. Durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^{n} P_i(\omega_i) \qquad (4)$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega$ definiert, das wir ebenfalls mit $P$ bezeichnen. Wir nennen $(\Omega, P)$ das **Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume** $(\Omega_i, P_i)_{1 \leq i \leq n}$.

## Satz F.21

**(Eindeutigkeit des Produkts von Wahrscheinlichkeitsräumen)**
*1. Durch (4) ist tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega$ definiert.*
*2. Sei $X_i$ die $i$-te Koordinatenfunktion auf $\Omega$, d.h. $X_i(\omega) = \omega_i$. Dann gilt für $A_i \in \Omega_i (i = 1, \dots, n)$:*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i). \qquad (5)$$

*Hierbei folgende Notation für als Urbild definierte Mengen:*

$$\{X_i \in A_i\} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | X_i(\omega) = \omega_i \ \in A_i\}.$$

*Insbesondere gilt dann*

$$P(\{X_n \in A_k\}) = P_k(A_k) \text{ für alle } 1 \leq k \leq n. \qquad (6)$$

*3. Das durch (4) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß ist das einzige Maß auf $\Omega$, bezüglich dessen jede Mengenfamilie $(\{X_i \in A_i\})_{1 \leq i \leq n}$ unabhängig ist und für die (6) gilt.*





## Beispiel F.22 (**n**-facher Münzwurf)

Wir betrachten eine Folge von $n$ unabhängigen Einzelexperimenten, die jeweils durch die Ergebnismenge $\Omega_i = \{K, Z\}$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_i(\omega_i) = \begin{cases} p & \text{für} \quad w_i = K, \\ 1-p & \text{für} \quad w_i = Z, \end{cases}$$

(mit $1 \leq i \leq n$) beschrieben sind. Hierbei ist $0 \leq p \leq 1$.
Die Produktmenge ist

$$\Omega = \{0, 1\}^n = \{(w_1, \dots, w_n) | w_i \in \{K, Z\}, 1 \leq i \leq n\},$$

und das Wahrscheinlichkeitsmaß ist gegeben durch seine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(\omega) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} P_i(\omega_i) = p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (7)$$

wobei $k$ die Anzahl der Indizes $i$ mit $\omega_i = 1$ ist.





## Definition F.23 (Bernoulli-Verteilung)

Der in Beispiel F.22 betrachtete Produktraum $(\Omega, P)$ heißt **Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit** $p$, und $P$ heißt **Bernoulli-Verteilung**.

## Beispiel F.24 (Binomialverteilung)

Wir führen Beispiel F.22 fort. Sei für $0 \leq k \leq n$ mit $E_k$ das Ereignis bezeichnet, dass genau $k$-mal ein Erfolg (eine 1) eintritt. Es gibt genau $\binom{n}{k}$ solcher $\omega \in \Omega$. Also

$$P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k). \qquad (8)$$





Wir überprüfen durch eine kurze Rechnung, dass die Summe der $P(E_k)$ gleich 1 ist:

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,p}(k) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p - (1-p))^k = 1.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die binomische Formel verwendet.

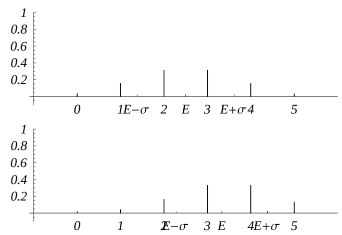


Abbildung: Stabdiagramme für die Binomialverteilungen $b_{5,\frac{1}{2}}$ und $b_{5,\frac{2}{3}}$.