Zufallsvariablen

Definition F.25 (Zufallsvariable)

Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und χ eine Menge. Eine Funktion $X : \Omega \to \chi$ heißt **Zufallsexperiment mit Werten in** χ (oder auch χ-**wertige Zufallsvariable**). Falls $\chi = \mathbb{R}$, heißt X **reelle Zufallsvariable**.

Bemerkung

Üblicherweise wird eine so genannte Unbestimmte, z.B. das Argument einer Funktion, als Variable bezeichnet. Man beachte, dass mit Zufallsvariable selber eine Funktion gemeint ist (deren Wert mit dem zufälligen Argument variiert).

Beispiel F.26 (für reelle Zufallsvariablen)

1. **Geldwette bei Münzwurf:** Ein einfacher Münzwurf sei durch $\Omega = \{K, Z\}, P(K) = p, P(Z) = 1 - p$ modelliert, wobei $0 \leq p \leq 1$. Bei Kopf erhält man 2 Euro Gewinn, bei Zahl verliert man 1 Euro. Der Gewinn (Verlust) ist eine reelle Zufallsvariable:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \{-1, 2\} \in \mathbb{R}, \\ X(K) &= 2, \\ X(Z) &= -1. \end{aligned}$$

2. **Würfeln:** $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, wobei mit $\omega = 1$ das Elementarereignis „Es wird eine 1 gewürfelt." gemeint ist. Sei X die Zufallsvariable, die jedem Wurf die erzielte Augenzahl zuordnet, also z.B.

$$X(1) = 1,$$

wobei die 1 auf der linken Seite das Elementarereignis „Es wird eine 1 gewürfelt." bezeichnet und die 1 auf der rechten Seite die reelle Zahl 1.

3. Vergleiche Beispiel F.24: Wir betrachten die **Binomialverteilung** zum n-maligen Münzwurf mit Ergebnissen eines einzelnen Münzwurfes in $\{K, Z\}$. Die Anzahl der Erfolge (Kopf) sei mit $X(\omega)$ bezeichnet, also

$$\begin{aligned} X : \Omega = \{K, Z\}^n &\to \{0, \ldots, n\}, \\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega), \end{aligned} \tag{9}$$

wobei

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \{0, 1\}, \\ X_i(\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad w_i = K, \\ 0 & \text{für} \quad w_i = Z. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable X ist also die Summe der Zufallsvariablen X_i.

Satz F.27

(Eine Zufallsvariable definiert eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf dem Bildraum)

Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \chi$ eine Zufallsvariable. Dann ist auf χ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion P_X durch

$$\begin{aligned} P_X : \chi &\to [0, 1], \\ P_X(y) &= P(\{X = y\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = y} P(\omega) \end{aligned}$$

definiert. Hierbei bezeichnet $\{X = y\} := \{\omega \in \Omega | X(\omega) = y\}$ die Urbildmenge von y bezüglich der Abbildung X.

Definition F.28 (Verteilung einer Zufallsvariablen)

Das Wahrscheinlichkeitsmaß zur Wahrscheinlichkeitsfunktion P_X aus Satz F.27 heißt **Verteilung von X bezüglich P** oder auch das **Wahrscheinlichkeitsmaß von X bezüglich P**.

Bemerkung: Wichtigkeit von Verteilungen

Meistens interessiert man sich ausschließlich für die Verteilung von Zufallsvariablen X und nicht für das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω. Wir hatten schon in Beispiel F.5 gesehen, dass verschiedene Wahlen von Ω möglich sein können. Oftmals ist der „steuernde Wahrscheinlichkeitsraum" nicht explizit bekannt oder sehr kompliziert.

Beispiel F.29 (Binomialverteilung als Verteilungsmaß)

Das in (8) durch die Binomialverteilung definierte Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der Menge $\{E_0, \ldots, E_n\}$ können wir offensichtlich auch als die Verteilung der Zufallsvariablen X aus (9) in Beispiel F.26 auffassen, also als Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge $\{0, 1, \ldots n\}$. Ein Element k aus dieser Menge entspricht dabei der Menge E_k aus Beispiel F.26. Also

$$P_X(k) = b_{n,p}(k).$$

Definition F.30 (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \chi_i$ (mit $i \in I$) heißt **unabhängig**, wenn für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ und jede Wahl von $A_j \subset \chi_j$ für alle $j \in J$ die Familie $(\{X_j \in A_j\})_{j\in J}$ unabhängig ist. (vgl. Definition F.19).

Bemerkung:Interpretation der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Seien z.B. X_1 und X_2 zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in χ_1 und χ_2, respektive. Die Verteilung von X_2 können wir als „Voraussage" über den zufälligen Wert von X_2 interpretieren. Seien $A_2 \subset \chi_2$ und $x_1 \in \chi_1$ mit $P(\{X_1 = x_1\}) > 0$. Die Kenntnis, dass X_1 den Wert x_1 annimmt, ermöglicht uns keine „bessere" Voraussage über den Wert von X_2. Dies wird an Beispiel F.31 veranschaulicht werden.

Bemerkung: Produktformel für unabhängige Zufallsvariablen

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i : \Omega \to \chi_i$ gilt

$$P(X_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

für jede Wahl von Ereignissen $A_i \subset \chi_i$. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von solchen Ereignissen der Form $\{X_1 \in A_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in A_n\}$ ist also besonders einfach.

Beispiel F.31 (Voneinander unabhängige Münzwürfe)

Wir betrachten den zweifachen Münzwurf aus Beispiel F.22 (also $n = 2$). Auf $\Omega = \{K, Z\}^2$ ist das Produktmaß gerade so definiert, dass die beiden Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} X_i : \Omega &\to \{K, Z\}, \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_i, \end{aligned}$$

von denen X_1 gerade den Ausgang des ersten Wurfs beschreibt und X_2 den des zweiten, voneinander unabhängig sind, was anschaulich auch klar sein sollte. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} P(\{X_1 = K \wedge X_2 = K\}) &= P_1(K) \cdot P_2(K) \\ &= P(\{X_1 = K\}) \cdot P(\{X_2 = K\}), \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die Produktformel (7) für die Wahrscheinlichkeitfunktion verwendet haben.