D - 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

(nach *Hartmann, Mathematik für Informatiker*)

Definition D.10 (Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE))

Eine Gleichung, in der neben der unabhängigen Variablen x und einer gesuchten Funktion $y = y(x)$ auch deren Ableitungen $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}(x)$ bis zur Ordnung n auftreten, heisst **Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (ODE)**.

Sind ausserdem ein x_0 aus dem Definitionsbereich von $y(x)$ und zugehörige Werte $y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ gegeben, so spricht man von einem **Anfangswertproblem**.

Separable Differentialgleichungen

Definition D.11 (Separable Differentialgleichung)

Eine Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ erster Ordnung heisst **separabel**, wenn sie sich in der Form

$$y' = f(x)\, g(y)$$

darstellen lässt, wobei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ sind.

Satz D.12 (Lösbarkeit: Anfangswertproblem separabler ODE)

Eine separable Differentialgleichung erster Ordnung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, hat im Intervall J eine eindeutige Lösung $y(x) : I \longrightarrow J$, falls

$$g(y) \neq 0 \qquad \forall y \in J.$$

Seien

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)} dy, \qquad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(x) dx$$

die Stammfunktionen von $\frac{1}{g(y)}$ bzw. $f(x)$.

Dabei wurden für Integrationsvariable und Obergrenze der Integration das gleiche Symbol verwendet.

Auf J ist $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ (Voraussetzung Satz D.12), daher ist G streng monoton und besitzt eine Umkehrfunktion G^{-1}.

Dann ist aber

$$y(x) := G^{-1}(F(x))$$

die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x)\, g(y)$, $y(x_0) = y_0$.

Probe:

$$\begin{aligned} G(y(x)) = F(x) \quad &\Longrightarrow \quad G'(y(x))\, y'(x) = F'(x) = \tfrac{1}{g(y(x))}\, y'(x) = f(x) \\ &\Longrightarrow \quad y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \end{aligned}$$

Anfangswert: $y(x_0) = y_0$

$$\begin{aligned} F(x_0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) \\ G(y_0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad G^{-1}(0) = y_0 \\ &\Longrightarrow \quad G^{-1}(0) = y_0 = y(x_0) \end{aligned}$$

Satz D.13

Das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x)\, g(y)$, mit Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, und dem Anfangswert $y(x_0) = y_0 \in J$, hat die eindeutige Lösung y, die man erhält, wenn man die folgende Gleichung nach y auflöst:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^{x} f(x) dx$$

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition D.14 (Lineare Differentialgleichung)

Differentialgleichungen, bei denen die Funktion $y = y(x)$ und ihre Ableitungen nur in linearem Zusammenhang auftreten heissen **Lineare Differentialgleichungen**.

Lineare Differentialgleichungen **erster Ordnung** haben die Form

$$y' + a(x)y = f(x).$$

Ist die Funktion $f(x) \equiv 0$ auf der rechten Seite identisch Null, so heisst die Gleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.

Die Funktion $F(x)$ auf der rechten Seite heisst **Quellfunktion**.

Satz D.15 (Lösung homogener linearer ODE)

Ist $a(x)$ auf dem Intervall I stetig, so lautet die vollständige Lösung der linearen Differentialgleichung $y' + a(x)\,y = 0$

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.

Satz D.16 (Lösung inhomogener linearer ODE)

Die inhomogen lineare Differentialgleichung $y' + a(x)\,y = f(x)$, $f, a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$, besitzt die vollständige Lösung

$$y = \left[\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)} dt + c \right] \cdot e^{-A(x)}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Definition D.17 (Lineare ODE n-ter Ordnung)

Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y \;=\; f(x)$$

heisst **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**.

Dabei sind die Funktionen $f, a_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall stetig. Die a_i heissen Koeffizientenfunktionen, f heisst Quellfunktion.

Ist $f = 0$, so heisst die Gleichung **homogen**, sonst **inhomogen**.

Satz D.18 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

Sei

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y \;=\; f(x)$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit $a_i, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.

Dann gibt es zu den Anfangswerten

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

genau eine Lösung $y = y(x)$ dieses Anfangswertproblems.

Diese Lösung existiert auf dem ganzen Intervall I.