Satz D.19 (Lösungsstruktur linearer ODE n-ter Ordnung)

Die Menge H der Lösungen $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der homogenen linearen Differentialgleichung $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y \;=\; 0$ mit $a_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bildet einen reellen Vektorraum der Dimension n.

Eine Basis des Lösungsraumes H nennt man **Fundamentalsystem**.

Jede Lösung y der inhomogenen Gleichung $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y \;=\; f(x)$ mit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ hat die Form

$$y = y_s + y_h$$

wobei $x_h \in H$ eine Lösung der homogenen und y_s eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (siehe Definition D.17) existiert kein allgemeines Lösungsverfahren.

Für den Fall *konstanter Koeffizientenfunktionen* $a_i(x) \in \mathbb{R}$ kann jedoch ein Fundamentalsystem angegeben werden:

Lösung des homogenen Systems

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y \;=\; 0$$

Lösungsansatz: Exponentialfunktion $\quad y(x) = e^{\lambda x} \quad$ und damit

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad y'(x) = \lambda\, e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n\, e^{\lambda x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \lambda^n\, e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1}\, e^{\lambda x} + \cdots + a_{n-1}\lambda\, e^{\lambda x} + a_n\, e^{\lambda x} &= \\ (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)\, e^{\lambda x} &= 0 \end{aligned}$$

Definition D.20 (Charakteristisches Polynom)

Das Polynom

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

heisst charakteristisches Polynom der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y \;=\; 0.$$

Fortsetzung: Lösung des homogenen Systems

Aus den Nullstellen $\lambda_i, i = 1 \ldots n$ mit $p(\lambda_i) = 0$ des charakteristischen Polynoms kann ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung konstruiert werden.

Dazu ist eine Fallunterscheidung nach der *Vielfachheit der Nullstellen λ_i* nötig:

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist einfache Nullstelle

Dann ist $\quad e^{\lambda x} \quad$ eine Lösung der Differentialgleichung.

$\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta \in \mathbb{C}$ ist einfache komplexe Nullstelle

$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad$ und $\quad e^{\alpha x} \sin \beta x \quad$ sind Lösungen der Differentialgleichung.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist k-fache reelle Nullstelle

$$x^i e^{\lambda x}, \quad i = 0, \ldots, k-1$$

sind k linear unabhängige Lösungen.

$\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta \in \mathbb{C}$ ist k-fache komplexe Nullstelle

$$x^i e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad i = 0, \ldots, k-1$$

sind die $2k$ linear unabhängige Lösungsfunktionen.

Beispiel D.21

Siehe *Hartmann, Mathematik für Informatiker*, S.352 ff.

D - 6 Euler Verfahren für Systeme von ODEs

Systeme von ODEs und ihre numerische Lösung

In vielen Anwendungen wird der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t durch einen Vektor

$$x(t) \;=\; [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^\top \quad \text{mit} \quad n > 0$$

beschrieben. Die Änderungsgeschwindigkeit $\dot{x} \equiv dx(t)/dt$ des Zustandes nach der Zeit ergibt sich häufig als Funktion $F(x(t))$ mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eben dieses Zustandes. Also erhalten wir das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) \;=\; F(x(t)) \quad \text{kurz} \quad \dot{x} \;=\; F(x)$$

Das System heisst autonom, da die Zeit t auf der rechten Seite nicht explizit, sondern nur mittelbar über $x = x(t)$ vorkommt. Dieses ist keine Einschränkung da ein nichtautonomes System $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ sich autonom umschreiben lässt indem man t als nullte Zustandskomponente $x_0(t)$ hinzufügt und somit für $\bar{x} \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$ erhält

$$\frac{d}{dt}\bar{x} \;\equiv\; \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ F(\bar{x}) \end{bmatrix} \;\equiv\; \overline{F}(x)$$

Auch ODEs höhere Ordnungen lassen sich in Systeme von ODEs erster Ordnung umschreiben, indem man z.B. die erste Ableitung y' als neue abhängige Variable $v \equiv y'$ definiert und dann y'' durch v' ersetzt. So wird zum Beispiel aus einer nichtautonomen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' \;=\; f(t, y, y')$$

das autonome System erster Ordnung in den drei Variablen $y_0 \equiv t$, $y_1 \equiv y$ und $y_2 \equiv y'$

$$\begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \\ f(y_0, y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

Entsprechend lassen sich Anfangsbedingungen umschreiben.

Die Umformulierung als System 1.Ordnung eröffnet die Möglichkeit numerische Standardmethoden und Software für die Lösung autonomer Systeme erster Ordnung mit Anfangsbedingungen zur Anwendung zu bringen.

Satz D.22 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung)

Sei $F : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ in einem offenem Gebiet $\mathcal{D}$ lokal Lipschitz-stetig. Dann existiert für jeden Punkt $y_o \in \mathcal{D}$ ein Intervall $(a, b) \ni 0$ und eine eindeutige Lösung $y(t) \in \mathcal{D}$ der ODE $\dot{y} = F(y)$ für $a < t < b$ mit $y(0) = y_0$.

Bemerkung:

(i) Für die Existenz einer Lösung ist die Stetigkeit von F hinreichend. Vorraussetzung von Lipschitz - Stetigkeit ist für die Eindeutigkeit der Lösung und die Konvergenz numerischer Verfahren erforderlich.

(ii) Das Intervall (a, b) kann so gross gewählt werden, dass $y(b)$ den Rand von $\mathcal{D}$ erreicht.

Eulers Methode und andere explizite ODE-Löser

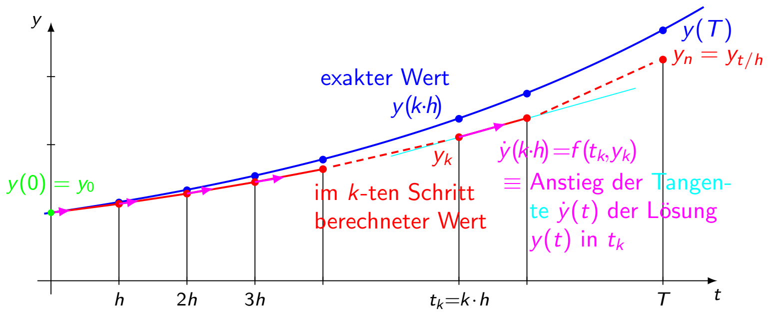
Die meisten ODEs haben keine geschlossen darstellbare Lösung.

Die Lösung kann aber durch numerische Methoden mit (mehr oder weniger) beliebiger Genauigkeit approximiert werden.
Numerische Approximationen sind auch alles, was zur Berechnung der mathematischen Standardfunktionen e^x, $\sin x$ etc. zur Verfügung steht, da diese Funktionen als Lösung von ODEs definiert sind.

Die einfachste numerische Methode zur Lösung von ODEs ist das Explizite (Vorwärts) Eulersche Polygonzugverfahren.

Explizite (Vorwärts) Euler-Methode

Sei $y(t)$ die exakte Lösung von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit $y(0) = y_0$.



Gesucht wird also $y_k \approx y(t_k)$ für $k = 0, \ldots, \frac{T}{h}$ mit $t_k = k \cdot h$:

$$\boxed{y_{k+1} \equiv y_k + h\, f(t_k, y_k)} \;\approx\; y(t_{k+1})$$

Beispiel D.23 (Autonome lineare ODE)

$$\dot{y} = \lambda y \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;\; \text{und} \;\; y_0 = 1$$

Anwendung von Eulers Methode:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\,\lambda y_0 &&= (1 + h\,\lambda) y_0 \\
y_2 &= y_1 + h\,\lambda y_1 &&= (1 + h\,\lambda) y_1 &&= (1 + h\,\lambda)^2 y_0 \\
&\vdots \\
y_k &= (1 + \lambda h)^k y_0 &&= (1 + \lambda h)^k \\
&\vdots \\
y_n &= (1 + \lambda h)^n y_0 &&= (1 + \lambda h)^{\frac{T}{h}}
\end{aligned}$$

Vergleich mit exakter Lösung:

$y(t) = \exp(\lambda\, t)$ ergibt am Endpunkt T

$$y(T) = e^{\lambda T} \equiv \lim_{h \to 0} (1 + \lambda h)^{\frac{T}{h}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \lambda \frac{T}{n}\right)^n$$

Erläuterung

Die angenäherte Lösung $y_{T/h}$ konvergiert gegen die exakte Lösung $y(T)$ der ODE wenn die Schrittweite $h = T/n$ gegen Null geht. Das bedeutet aber dass die Anzahl der Eulerschritte und damit der Berechnungsaufwand gegen ∞ gehen.

Frage:

Kann der Approximationsfehler $\|y_{T/h} - y(T)\|$ als Funktion der Schrittweite $h = T/n$ dargestellt und somit zur Bestimmung einer vernünftigen Schrittzahl n genutzt werden?

Antwort: **JA!**

Im vorliegenden speziellen Fall gilt

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{y_{T/h}}{y(T)} - 1 \right) \frac{1}{h} = -\tfrac{1}{2} T \lambda^2$$

und somit erfüllt der Fehler

$$y_{T/h} - y(T) = h(-\tfrac{1}{2} T \lambda^2) + O(h^2)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\lambda T} (1 + \lambda h)^{T/h} - 1}{h} \\
=\; & \lim_{h \to 0} e^{-\lambda T} \tfrac{d}{dh} e^{T/h \ln(1+\lambda h)} \\
=\; & \lim_{h \to 0} e^{-\lambda T} (1 + \lambda h)^{T\lambda/\lambda h} \left(-\frac{T}{h^2} \ln(1 + \lambda h) + \frac{T\lambda}{h(1 + \lambda h)} \right) \\
=\; & \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} T \left[- - \frac{\lambda}{(1 + \lambda h)} + \frac{\lambda}{(1 + \lambda h)} + \frac{\lambda^2 h}{(1 + \lambda h)^2} \right] \\
=\; & -\tfrac{1}{2} T \lambda^2
\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung D.24 (Approximationsfehler der Euler-Methode)

Für alle Lipschitz-stetigen Probleme (d.h. die rechte Seite $F(t, y, \dot{y})$ der ODE ist Lipschitz-stetig) liefert das Euler-Verfahren eine numerische Lösung mit

$$y_{T/h} - y(T) \; = \; c(T)\, h + O(h^2).$$

Deshalb nennt man diese Methode auch

Verfahren erster Ordnung:

Die Verdopplung der Approximationsgenauigkeit durch Halbierung der Schrittweite h verdoppelt den Berechnungsaufwand.

Frage:

Gibt es Verfahren der Fehlerordnung p so dass

$$\|y_n - y(T)\| = c(T)h^p + O(h^{p+1})$$

gilt und damit die Halbierung der Schrittweite h zu einer Reduktion des Fehlers um den Faktor $(\frac{1}{2})^p$ führt ?

Anwort: **JA!**

- $\mathbf{p = 2}$ *Mittelpunkt - Regel* oder *Heun'sches Verfahren*
- $\mathbf{p = 4}$ *Runge-Kutta* 4. Ordnung
- $\mathbf{p = 5}$ *Runge-Kutta-Fehlberg*