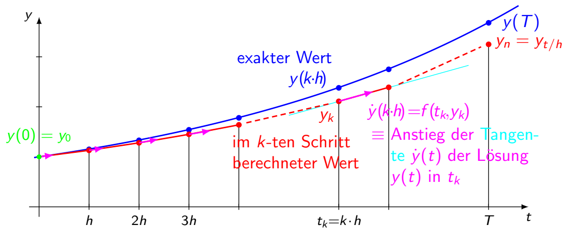
Explizite (Vorwärts) Euler-Methode

Sei $y(t)$ die exakte Lösung von $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ mit $y(0) = y_0$.



Gesucht wird also $y_k \approx y(t_k)$ für $k = 0, \ldots, \frac{T}{h}$ mit $t_k = k \cdot h$:

$$\boxed{y_{k+1} \equiv y_k + h\, f(t_k, y_k)} \;\approx\; y(t_{k+1})$$

Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 2 und 4

Mittelpunkt-Regel

- $t_{k+1/2} \;=\; t_k + 0.5\, h_k; \quad t_{k+1} \;=\; t_k + h_k$
- $y_{k+1/2} \;=\; y_k + 0.5\, h_k\, f(t_k, y_k)$
- $y_{k+1} \;=\; y_k + h_k\, f(t_{k+1/2}, y_{k+1/2})$

Runge-Kutta 4 (Standardwahl)

- $t_{k+1/2} \;=\; t_k + 0.5\, h_k; \quad t_{k+1} \;=\; t_k + h_k$
- $y_{k+1/4} \;=\; y_k + 0.5\, h_k\, f(t_k, y_k)$
- $y_{k+1/2} \;=\; y_k + 0.5\, h_k\, f(t_{k+1/2}, y_{k+1/4})$
- $y_{k+3/4} \;=\; y_k + \; h_k\, f(t_{k+1/2}, y_{k+1/2})$
- $y_{k+1} \;=\; y_k + \frac{h_k}{6}\left[f(t_k, y_k) + 2f(t_{k+1/2}, y_{k+1/4}) + 2f(t_{k+1/2}, y_{k+1/2}) + f(t_{k+1}, y_{k+3/4})\right]$

Visualisierung der Verfahrensordnung

Für einen beliebigen numerischen Integrator folgt aus der vorrausgesetzten Beziehung

$$\|y_{T/h} - y(T)\| \;=\; c(T)h^p + O(h^{p+1}) \;\approx\; c(T)h^p$$

durch Logarithmierung, dass

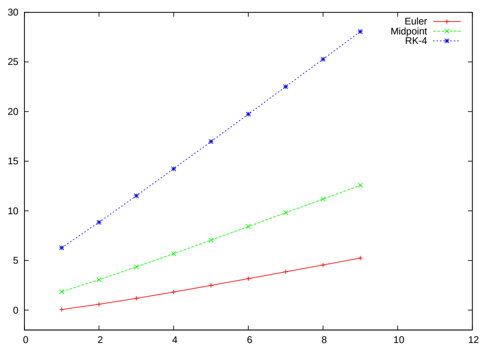
$$-\log\left(\|y_{T/h} - y(T)\|\right) \;\approx\; p(-\log(h)) - \log(c(T))$$

Die linke Seite ist ein Maß der korrekt berechneten Dezimalstellen in der Lösung. Sie ist nun annäherungsweise eine affine Funktion von $-\log(h)$ also eine Gerade, deren Steigung gerade die Ordnung p der Methode ist.

Um die Ordnung eines Verfahrens zu prüfen kann man die Schrittweite zum Beispiel wie $h_k = T/2^k$ für $k = 1, 2 \ldots$ variieren und die entsprechenden Fehler $-\log\left(\|y_{T/h_k} - y(T)\|\right)$ über den Abszissenwerten $-log(h_k) = k\,\log(2) - \log(T)$ auftragen.

Visualisierung der Verfahrensordnung

Euler   Mittelpunkt-Regel   Runge-Kutta 4.Ordnung



Frage:
Wie kann die Schrittweite in Hinblick auf den geschätzten Fehler gewählt werden?

Antwort:
Durch Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Schrittweiten h oder verschiedener Methoden.

Beispiel D.25 (Mittelpunkt - Regel)

$$\begin{array}{lll} & y_n & = & y(T) + c(T)\, h^2 + O(h^3) \\ & y_{2n} & = & y(T) + c(T)\, \frac{1}{4} h^2 + O(h^3) \\ \Longrightarrow & y_n - y_{2n} & = & c(T)\, \frac{3}{4} h^2 + O(h^3) \\ \Longrightarrow & c(T) & \approx & \boxed{\frac{4}{3}\frac{y_n - y_{2n}}{h^2} \quad \equiv \tilde{c}(T)} \\ \Longrightarrow & \|y_{2n} - y(T)\| & \approx & \frac{4}{3}\|y_{2n} - y_n\| \end{array}$$

ist eine Fehlerabschätzung für die Mittelpunktregel.

Folgerung D.26 (Einfache Schrittweitensteuerung)
Wenn die numerische Lösung mit einer absoluten Genauigkeit von $\tau > 0$ gewünscht wird, dann wählt man bei der Mittelpunktsregel

$$h = \sqrt[2]{\tau/\tilde{c}(T)}$$

Allgemeiner empfiehlt sich für ein Verfahren der Ordnung p

$$h = \sqrt[p]{\tau/\tilde{c}(T)}$$

Hierbei ist die Fehlerkonstante $\tilde{c}(T)$ STARK vom Verfahren abhängig. Nimmt man dennoch an, dass für Euler, Mittelpunkt und Runge-Kutta 4 die $c = c(T)$ ähnlich gross sind, so ergeben sich Rechenaufwände von

$$1 \cdot c/\tau, \qquad 2 \cdot \sqrt{c/\tau}, \qquad 4 \cdot \sqrt[4]{c/\tau}$$

Auswertungen der rechten Seite. Bei grösserer geforderter Genauigkeit, also kleinerem τ sind Verfahren höherer Ordnung zu bevorzugen, vorrausgesetzt die rechte Seite der ODE ist p mal differenzierbar.

Numerische Integration von Systemen
Runge-Kutta Methoden sind direkt auf Systeme

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \in \mathbb{R}^n \quad \text{bzw} \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \in \mathbb{R}^n$$

anwendbar. Während die unabhängige Variable t und die entsprechenden Schrittweiten h Skalare bleiben, sind alle anderen Grössen jetzt Vektoren der Länge n.
Die Euler Rekursion

$$y_{k+1} = y_k + h_k F(t_k, y_k) \in \mathbb{R}^n$$

erfordert also das h-fache des Richtungsvektors $F(t_k, y_k) \in \mathbb{R}^n$ zu dem alten Zustandsvektor y_k zu addieren, um den neuen Zustandsvektor $y_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ zu erhalten. Es ist davon auszugehen, dass diese Vektormultiplikation und -addition vom Aufwand her gegenüber der Auswertung der Rechten Seite $F(t, y)$ vernachlässigbar ist.
Die Konvergenzordnungen bleiben erhalten, wobei der Abstand zwischen der annähenden und der genauen Lösung jetzt als eine Vektornorm $\|y_{T/h} - y(T)\|$ der Differenz zwischen $y_{T/h}$ und $y(T)$ zu bestimmen ist.

Lineares Beispiel für Euler

Das autonome System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hat die analytische Lösung $[x(t), y(t)] = [cos(t), sin(t)]$. Die Anwendung der Eulermethode mit Schrittweite h ergibt

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -y_n \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n - hy_n \\ y_n + hx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$= \rho \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \rho^n \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

wobei $\rho \equiv \sqrt{1+h^2}$ und $\alpha = \arcsin(h/\sqrt{1+h^2})$.