

Langzeitverhalten von ODE – Lösungen

Bemerkung zum Langzeitverhalten

Häufig ist von Interesse (z.B. in der Klimavorhersage), wie sich Lösungen $y(t)$ der ODE $\dot{y} = F(y)$ für *sehr grosse* t **qualitativ** verhalten, und zwar **unabhängig** vom Anfangswert $y(t_0) = y_0$.

D.h. man will wissen, ob das dynamische System sich einschwingt, einen Gleichgewichtszustand erreicht, zufälliges (d.h. chaotisches) Verhalten o.ä. zeigt.

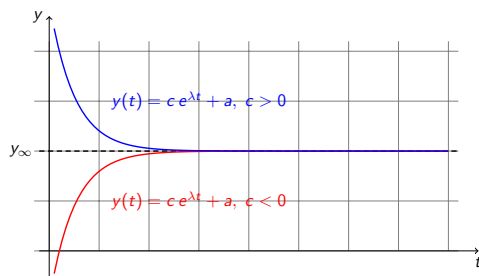
Im folgenden machen wir Aussagen für autonome Systeme der Zustandsraumdimension n , die entsprechend auch für nichtautonome Systeme der Dimension $n - 1$ gelten.

- 79 -

(I) Falls $n = 1$ muss und sonst ($n > 1$) kann einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

(a) $y(t)$ strebt einem stationären Grenzwert $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ zu

Beispiel: $\dot{y} = \lambda(y - a)$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$, y_0 beliebig



- 80 -

(b) $y(t)$ explodiert (blow up)

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|y(t)\| = \infty \quad \text{für endliche Zeit } t^* \text{ (kritische Zeit)}$$

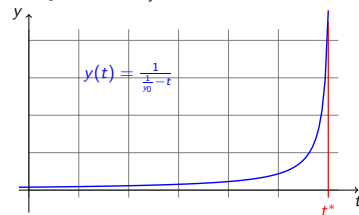
Beispiel: $\dot{y} = y^2$ mit $y(0) = y_0 > 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{t + c}$$

AW: $y_0 = -\frac{1}{c} > 0$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{y_0} < 0$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$



- 81 -

(II) Asymptotisch periodische Lösung

Falls die Zustandsdimension $n = 2$ ist muss, ansonsten kann $y(t)$ sich asymptotisch einer periodischen Lösung $y_*(t)$ nähern, für die gilt

$$y_*(t + T) = y_*(t)$$

für alle $t > 0$ und feste Periode T .

Beispiel: siehe obiges *Lineares Beispiel für Euler*

(III) Chaotisches Verhalten

Falls Dimension $n > 2$ (einschliesslich $n = 2$ im nichtautonomen Fall) kann die Lösung $y(t)$ der ODE sich chaotisch verhalten, d.h. auch nach sehr langer Zeit lässt sich keine periodische oder stationäre Struktur erkennen.

Beispiel: Lorenz - Attraktor (Übung 2)

- 82 -

D-7 Interpolation mit Polynomen und Splines

Interpolation mit Polynomen (Whd. 1.Semester)

Satz D.27 (Lagrange - Interpolation)

Sei $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ oder ein anderer Körper. Dann gilt:

- (i) Es existiert zu jeder Familie von Wertepaaren $(x_i, y_i) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ für $i = 0, 1, \dots, n$ mit unterschiedlichen "Abzissenwerten" $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ ein Interpolationspolynom $P(x)$ vom Grad $\leq n$, so daß
- $$P(x_i) = y_i \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n.$$

- (ii) Dieses Polynom ist eindeutig und läßt sich darstellen als

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \underbrace{\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}}_{\equiv P_i(x)}$$

- (iii) Insbesondere folgt aus $y_i = 0$ für $i = 0, \dots, n$, dass alle Koeffizienten c_i in $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ verschwinden, d.h. es gilt
- $$c_i = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

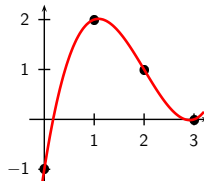
- 83 -

Beispiel – Lagrangepolynom

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	2	1	0

$$P(x) = -1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 1 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

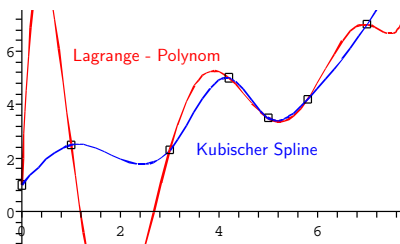
$$P(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{19}{3}x - 1$$



- 84 -

Warnung:

Interpolationspolynome höherer Ordnung können zwischen den vorgegebenen Datenpunkten *sehr stark oszillieren*, deshalb wendet man in der Numerik lieber aus Polynomen niedriger Ordnung zusammengesetzte Funktionsmodelle an. \implies Cubic Splines, Finite Elemente.



- 85 -

Interpolation durch kubische Splines

Gegeben:

gemessene Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$.

Gesucht:

manipulierbare Funktion $P(x)$ mit $P(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Ansatz

Definiere die interpolierende Funktion $P : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ als kubisches Polynom P_i , so dass für $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ gilt:

$$P(x) = P_i(x) = a_i(x-x_{i-1})^3 + b_i(x-x_{i-1})^2 + c_i(x-x_{i-1}) + d_i,$$

wobei die $4n$ Koeffizienten (a_i, b_i, c_i, d_i) für $i = 1, \dots, n$ zu bestimmen sind.

- 86 -

Eigenschaften kubischer Polynome

P_i hat 4 freie Parameter und die Ableitungen

$$\begin{aligned} P_i'(x) &= 3a_i(x - x_{i-1})^2 + 2b_i(x - x_{i-1}) + c_i \\ P_i''(x) &= 6a_i(x - x_{i-1}) + 2b_i \\ P_i'''(x) &= 6a_i \\ P_i''''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der $4n$ Koeffizienten $(a_i, b_i, c_i, d_i), i = 1, \dots, n$, des gesuchten kubischen Splines $P(x)$ sind genauso viele Gleichungen nötig. Diese werden aus vier verschiedenen Bedingungen, die die interpolierenden Polynome erfüllen müssen, hergeleitet.

- 87 -

Interpolationsbedingung

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= P_{i+1}(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ P_1(x_0) &= y_0 \\ P_n(x_n) &= y_n \end{aligned}$$

Mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ folgt aus der Interpolationsbedingung für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} d_i &= y_{i-1} - P_i(x_{i-1}) \\ a_i \Delta x_i^3 + b_i \Delta x_i^2 + c_i \Delta x_i + d_i &= y_i - P_i(x_i) \end{aligned}$$

Das sind n mal 2 lineare Gleichungen in jeweils 4 Unbekannten.

- 88 -

Steigungsbedingung

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

Daraus folgen die $n-1$ weiteren Bedingungen:

$$3a_i \Delta x_i^2 + 2b_i \Delta x_i + c_i = c_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Es bleiben noch $n+1$ Freiheitsgrade nach Erfüllung der bisher gefundenen $3n-1$ linearen Gleichungen.

Krümmungsbedingung

$$P_i''(x) = P_{i+1}''(x), \quad i = 1, \dots, n$$

Daraus folgen $n-1$ weitere Bedingungen der Form

$$6a_i \Delta x_i + 2b_i = 2b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- 89 -

Insgesamt hat man nun $4n-2$ lineare Gleichungen in $4n$ Unbekannten, die fehlenden 2 Gleichungen werden durch spezielle Forderungen an P_1 und P_n im Anfangspunkt x_0 bzw. Endpunkt x_n erhalten. Diese beiden Bedingungen unterscheiden auch verschiedene Typen kubischer Splines:

Natürlicher kubischer Spline

$$P''(x_0) = P_1''(x_0) = 0 = P_n''(x_n) = P_n''(x_n)$$

Im Falle natürlicher Splines sind die letzten fehlenden Gleichungen also

$$b_0 = 0 \quad \text{und} \quad 3a_n \Delta x_n + b_n = 0$$

Periodischer kubischer Spline

$$P_1(x_0) = P_n(x_n), \quad P_1'(x_0) = P_n'(x_n), \quad P_1''(x_0) = P_n''(x_n).$$

- 90 -

Summierte Trapezregel

$$T_n = h_n \left[\frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

Approximationsfehler summierte Trapezregel

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h_n^2 \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

- 95 -

Kepler'sche Fassregel

Ansatz: Quadratischer Spline $g(x)$ durch die Punkte $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, und $(b, f(b))$

$$g(x) = cx^2 + dx + e$$

Durch geeignete Umformung des Ansatzes erhält man eine Berechnungsvorschrift **ohne** die Koeffizienten c, d und e des Splines $g(x)$:

$$S_0 = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

- 96 -

Simpson'sche Regel (Summierte Kepler'sche Fassregel)

Anwendung der Fassregel auf die Teilintervalle der Länge $h_n = \frac{b-a}{n}$, n gerade, ergibt die Simpson'sche Regel:

$$S_n = \frac{h_n}{3} \left[f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f_{2i-1} \right]$$

Approximationsfehler summierte Simpson'sche Regel

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{b-a}{180} \cdot h_n^4 \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

- 97 -

Quadratur mit Extrapolation – Romberg's Verfahren

Für hinreichend oft differenzierbare Integranden $f(x)$ beschreibt die *Euler-Maclaurinsche Summenformel* den Fehler der summierten Trapezregel T_n als Polynom in geraden Potenzen der Schrittweite h_n :

$$T_n = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^N \alpha_{2k} h_n^{2k} + O(h_n^{2N+2})$$

Die dabei auftretenden Koeffizienten α_{2k} sind von h_n unabhängige Konstanten.

Damit können Fehlerterme von Quadraturformeln durch sog. *Extrapolation zur Grenze/zum Limit* eliminiert werden, in der Werte einer Quadraturformel bei unterschiedlichen Schrittweiten h_n , $n = n_1, n_2, \dots$, kombiniert werden.

Bei geschickter Wahl der Extrapolation erreicht man eine Aufhebung von Fehlertermen kleiner Ordnung, so das der extrapolierte Wert eine deutlich genauere Approximation des gesuchten Integralwertes ist.

- 98 -

Romberg Verfahren

Zuerst wird für $n = 1$ die Trapezregel auf dem gesamten Integrationsintervall $[a, b]$ ausgewertet. Der erhaltene Wert T_1 (d.h. Schrittweite $h_1 = b - a$) wird als erster Eintrag R_0^0 in die erste Zeile der Tabelle eingetragen.

Mit halbiertes Schrittweite $h_2 = h_1/2$ wird $T_2 = R_1^0$ berechnet und in die erste Spalte der zweiten Zeile direkt unter R_0^0 notiert:

k	$n = 2^k$	R_k^0	
0	1	R_0^0	
1	2	R_1^0	R_1^1

Daraus berechnet man den *extrapolierten Wert* R_1^1 mittels

$$R_1^1 = \frac{4R_1^0 - R_0^0}{3} = S_2,$$

was aber genau *Simpsons Regel* für $n = 2$ ergibt.

Romberg Verfahren (Fortsetzung)

Dieses Vorgehen kann in einer neuen Zeile der Tabelle fortgeführt werden.

Die k -te Zeile erhält man dabei, indem zunächst die Trapezregel mit erneut halbiertes Schrittweite $h_n = h_{2^k}$ (d.h. $n = 2^k$) ausgeführt wird und T_{2^k} als R_k^0 in die erste Spalte eingetragen wird.

In den darauffolgenden k Extrapolationsschritten werden jeweils die Werte R_k^j der k -ten Zeile für $j = 1, \dots, k$ aus dem links stehenden Wert R_k^{j-1} und dem links darüber stehenden Wert R_{k-1}^{j-1} berechnet:

$$R_k^j = \frac{4^j R_k^{j-1} - R_{k-1}^{j-1}}{4^j - 1} = R_k^{j-1} + \frac{1}{4^j - 1} (R_k^{j-1} - R_{k-1}^{j-1}) \quad j = 1, \dots, k$$

Insgesamt ergibt sich damit das folgende Tableau:

Romberg Verfahren (Fortsetzung)

k	$n = 2^k$	$R_k^0 = T_n$	R_k^1	R_k^2	...
0	1	$R_0^0 = T_1$			
1	2	$R_1^0 = T_2$	R_1^1		
2	4	$R_2^0 = T_4$	R_2^1	R_2^2	
3	8	$R_3^0 = T_8$	R_3^1	R_3^2	R_3^3
4	16	$R_4^0 = T_{16}$	R_4^1	R_4^2	R_4^3 R_4^4
⋮	⋮	⋮			⋮ ⋮

Als **Abbruchbedingung** eignet sich die Differenz zwischen den beiden zuletzt berechneten Diagonalelementen des Schemas. Falls mit einer vorgegebenen Grösse δ die Bedingung

$$|R_k^k - R_{k-1}^{k-1}| \leq \delta$$

erfüllt ist, dann wird das Verfahren beendet und R_k^k als Näherung des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ betrachtet.

Approximationsfehler Romberg-Verfahren

Für $f \in C^{2k+2}([a, b])$ gilt:

$$\left| R_k^k - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) h_1^2 h_2^2 \dots h_{2^k}^2 \alpha_{2k+2} \max_{x \in [a, b]} |f^{(2k+2)}|$$

wobei α_{2k+2} wiederum eine Konstante ist.

Bemerkung

Die auftretenden Konstanten α_i ergeben sich als

$$\alpha_i = \frac{B_i}{i!},$$

wobei die B_i die so genannten *Bernoulli - Zahlen* sind. Diese berechnen sich rekursiv aus

$$B_i = (-1)^{i-1} \left[\frac{2i-1}{2(2i+1)} + (2i)! \sum_{k=1}^{i-1} \frac{B_k}{(2i-2k+1)!(2k)!} \right].$$