HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. ANDREAS GRIEWANK
JAN RIEHME, DR. JULIA STERNBERG, DR. STEFAN KÖRKEL, MACIEK KORZEC

Klausur zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

16. 3. 2006

Musterlösung

Aufgabe 1: Newton-Verfahren

Betrachte Newtons Methode für die nichtlineare Gleichung

$$f(x) = x - \cos(x) = 0.$$

(i) Untersuche, ob Newtons Methode auf dem Intervall $I := [0, 1.5]$ durchgeführt werden kann. (**2 Punkte**)

(ii) Untersuche, ob f auf ganz I eine Kontraktion ist. (**3 Punkte**)

(iii) Berechne einen Newtonschritt ausgehend von $x_0 = \pi/6$. (**3 Punkte**)

Lösung (i): $f(x)$ ist auf I beliebig oft stetig differenzierbar.

$f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$, $f(1.5) = 1.5 - \cos(1.5) \approx 1.5 > 0$.

Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f in I.

$f'(x) = 1 + \sin(x) > 0$ für alle $x \in I$.

Daher ist Newtons Methode durchführbar.

Lösung (ii): Weil $f'(x) = 1 + \sin(x) > 1$ für alle $x \in I$, ist f auf I keine Kontraktion.

Lösung (iii): Newtonschritt:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{6} - \frac{\frac{\pi}{6} - \cos(\frac{\pi}{6})}{1 + \sin(\frac{\pi}{6})} = \frac{\pi}{6} - \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

Aufgabe 2: Reihen

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}$ (**2+2 Punkte**)

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (**2+3 Punkte**)

Hinweis: $\sin(1/n) > 1/(2n), n \in \mathbb{N}_+$

Lösung (i): Es ist $\left|\frac{\pm 1}{\pi}\right| < 1$. Deshalb konvergieren im folgenden die geometrischen Reihen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - (-1/\pi)} = \frac{1}{\pi + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n} = \left(\frac{1^0}{\pi^0}-\frac{1^0}{\pi^0}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-(1/\pi)} - 1 = \frac{1}{\pi-1}$$

Lösung (ii):

Da $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ für alle $n \geq 1$ und die Folge $\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ monoton gegen 0 fällt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ nach dem Leibniz-Kriterium.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ divergiert, da sie eine Majorante einer divergenten Reihe ist.

Aufgabe 3: Grenzwerte

Überprüfe auf Existenz von eigentlichen/uneigentlichen Grenzwerten und gib diese an.

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ (**2 Punkte**)

(ii) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{x-1}$ (**2 Punkte**)

(iii) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}$ (**2 Punkte**)

(iv) $\lim_{x\to 0_+}\frac{\tan(x)+\cos(x)}{\sin(x)}$ (**3 Zusatzpunkte**)

Lösung (i):

Regel von l'Hospital: Haben zwei stetig differenzierbare Funktionen f und g eine gemeinsame Nullstelle oder Polstelle in x_0, so gilt $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\sin(ax)\cos(bx)}{-b\cos(ax)\sin(bx)}$$
$$= \frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{a\cos(ax)\cos(bx)-b\sin(ax)\sin(bx)}{-a\sin(ax)\sin(bx)+b\cos(ax)\cos(bx)} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

Lösung (ii):

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{1} = 0$$

Lösung (iii):

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Lösung (iv):

$\lim_{x\to 0_+}\frac{\tan(x)+\cos(x)}{\sin(x)}$: Der Zähler konvergiert gegen 1_+, der Nenner gegen 0_+, also geht der Bruch gegen $+\infty$.

Aufgabe 4: Integrale

Berechne die folgenden Integrale.

(i) $$\int_a^b \frac{1}{x^2+1+2x}\,dx \qquad \text{für } a,b>-1$$ (**3 Punkte**)

(ii) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x)^c}\,dx \qquad \text{mit } c \neq 1$$ (**3 Punkte**)

Lösung (i):

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1+2x}dx = \int_a^b \frac{1}{(x+1)^2}dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_a^b = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1}$$

Lösung (ii):

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x)^c}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{z^c}\,dz = \left[\frac{z^{-c+1}}{-c+1}\right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-c}, & \text{falls } c<1 \\ \infty, & \text{falls } c>1 \end{cases}$$

(mit der Transformation $z=\sin x$, $dz=\cos x\,dx$, $z(0)=0$, $z(\pi/2)=1$)

Aufgabe 5: Floating-Point-Arithmetik

Bestimme den maximalen Rundungsfehler, der bei Auswertung des Ausdrucks

$$s = (a+b)\cdot c + d\cdot e$$

enstehen kann. Benutze zur Vereinfachung die Werte $a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=3$, $e=2$.

(**4 Punkte**)

Lösung:

$fl(a\circ b) = (a\circ b)(1+\epsilon)$ mit $|\epsilon| \leq \mathsf{eps}$

$fl(s) = fl(fl(fl(a+b)\cdot c) + fl(d\cdot e)) = (((a+b)(1+\epsilon_1)\cdot c)(1+\epsilon_2) + (d\cdot e)(1+\epsilon_3))(1+\epsilon_4) =$
$ac + bc + de + ac\epsilon_1 + bc\epsilon_1 + ac\epsilon_2 + bc\epsilon_2 + de\epsilon_3 + ac\epsilon_4 + bc\epsilon_4 + de\epsilon_4 + ac\epsilon_1\epsilon_2 + bc\epsilon_1\epsilon_2 + ac\epsilon_1\epsilon_4 +$
$bc\epsilon_1\epsilon_4 + ac\epsilon_2\epsilon_4 + bc\epsilon_2\epsilon_4 + de\epsilon_3\epsilon_4 + ac\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_4 + bc\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_4$

$|fl(s)-s| \leq (|ac|+|bc|+|ac|+|bc|+|de|+|ac|+|bc|+|de|)\cdot\mathsf{eps} + O(\mathsf{eps}^2) = 42\cdot\mathsf{eps} + O(\mathsf{eps}^2)$

Aufgabe 6: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Löse die folgende Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(1)=1$ exakt.

$$x^2\cdot y' - y = 0$$

Zeige als Probe, dass die berechnete Lösung die Differentialgleichung erfüllt. (**6 Punkte**)

Führe zwei Euler-Schritte mit der Schrittweite $h=1$ durch. (**2 Punkte**)

Lösung:

$x^2\cdot y' - y = 0 \iff x^2\cdot dy/dx - y = 0 \iff dy/y = dx/x^2$ (Trennung der Variablen)

$\iff \int dy/y = \int dx/x^2 + C \iff \ln y = -1/x + C \iff y = e^{-1/x+C}$

Anfangswert: $y(1) = e^{-1/1+C} = 1 \iff C=1$

Analytische Lösung: $y(x) = e^{-1/x+1}$

Probe: $y'(x) = 1/x^2\cdot e^{-1/x+1} = 1/x^2\cdot y(x) \Longrightarrow x^2\cdot y' - y = 0$ und außerdem $y(1) = e^0 = 1$

Euler-Schritte: $y_{k+1} = y_k + h\cdot f(x_k,y_k)$ mit $f(x,y) = y/x^2$:

$y_0 = 1$

$y_1 = 1 + 1\cdot 1/1 = 2,$

$y_2 = 2 + 1\cdot 2/4 = 5/2$

Aufgabe 7: Interpolation mit natürlichen kubischen Splines

Seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$ und zugehörige Messwerte $y_0 = 0.5$, $y_1 = 0$, $y_2 = -0.5$ und $y_3 = 1$ gegeben.

In der Vorlesung wurden Gleichungen für Zwischenwerte z hergeleitet, aus denen sich die Splinekoeffizienten berechnen lassen.

Stelle das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung dieser Werte z auf. (**6 Punkte**)

Löse das Gleichungsystem. (**2 Punkte**)

Berechne die Splinekoeffizienten (a_i, b_i, c_i, d_i). (**4 Zusatzpunkte**)

Lösung:

Splinebedingungen ($n = 3$):

$$\begin{aligned}
P_i(x) &= a_i(x - x_{i-1})^3 + b_i(x - x_{i-1})^2 + c_i(x - x_{i-1}) + d_i, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, ..., n \\
P_i(x_i) &= y_i, \qquad i = 1, ..., n \\
P_1(x_0) &= y_0, \\
P_i(x_i) &= P_{i+1}(x_i), \qquad i = 1, ..., n-1 \\
P_i'(x_i) &= P_{i+1}'(x_i), \qquad i = 1, ..., n-1 \\
P_i''(x_i) &= P_{i+1}''(x_i), \qquad i = 1, ..., n-1 \\
P_1''(x_0) &= P_n''(x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Aufstellen des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung von z:

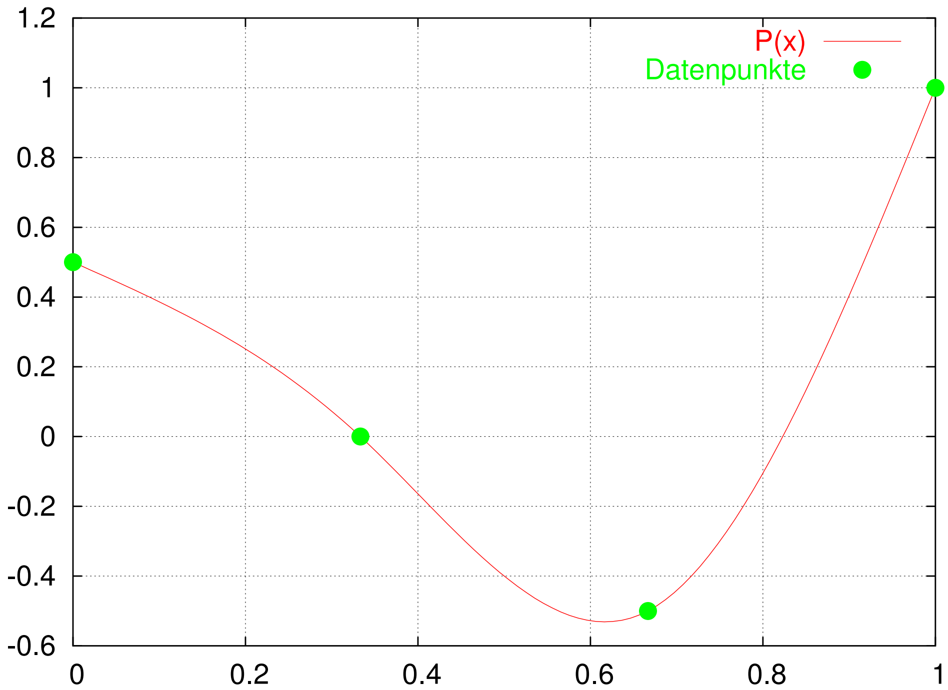
$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \\
\alpha_2 &= \alpha_1 = \frac{4}{3} \\
\beta_2 &= \frac{1}{3} \\
r_1 &= 6 \cdot \left(\frac{-0.5 - 0}{1/3} - \frac{0 - 0.5}{1/3}\right) = 6 \cdot 0 = 0 \\
r_2 &= 6 \cdot \left(\frac{1 + 0.5}{1/3} - \frac{-0.5 - 0}{1/3}\right) = 6 \cdot 6 = 36
\end{aligned}$$

Daraus das System:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36}{5} \\ \frac{4 \cdot 36}{5} \end{pmatrix}.$$

Benutze die Formeln aus der Vorlesung (Skript Seite 91)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ 18 \\ -\frac{72}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{18}{5} \\ \frac{72}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ -\frac{23}{10} \\ \frac{13}{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 8: Lineare Optimierung

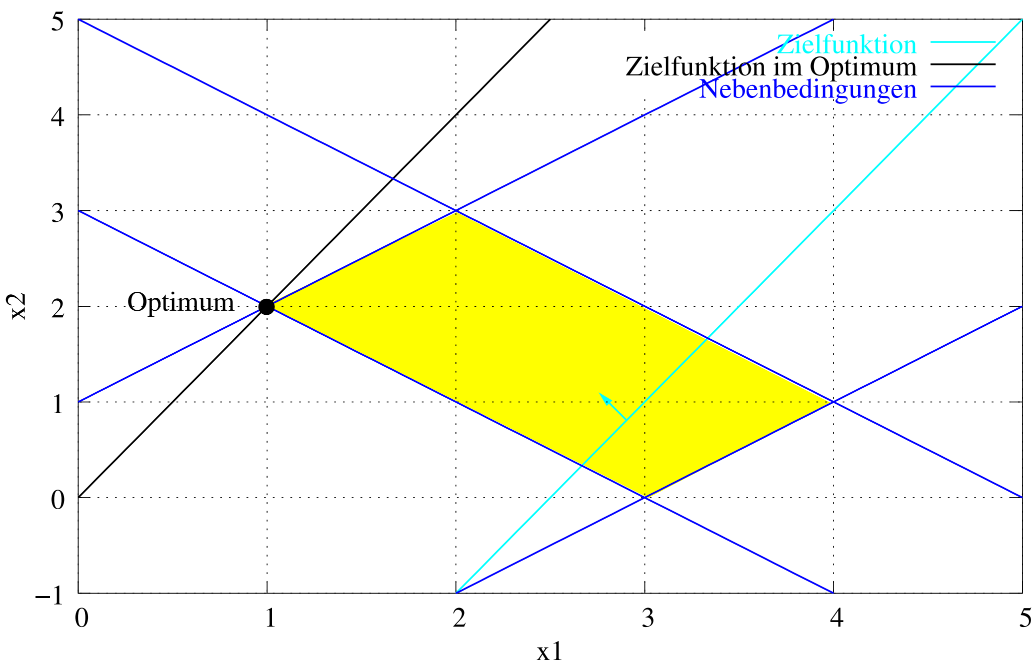
$$\begin{array}{rrcrcl} \min & 2\,x_1 - x_2 & & & & \\ \text{so dass} & x_1 & - & x_2 & \le & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \ge & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 5 \end{array}$$

(i) Löse das obige Optimierungsproblem grafisch. (**4 Punkte**)

(ii) Löse das obige Optimierungsproblem mit dem in der Vorlesung angegebenen geometrischen Simplexverfahren. Benutze $(x_1, x_2) = (4, 1)$ als Startecke.

(**6 Zusatzpunkte**)

Lösung (i): Grafische Lösung:



Optimum: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ mit Zielfunktionswert 0

Lösung (ii):

LP in der Form $\max c^T x,\ Ax \le b$ mit $c^T = \begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}3\\1\\-3\\5\end{pmatrix}$

Geometrisches Simplexverfahren:

(i) Startpunkt: $x^0 = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\ B = (1,4),\ A_B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{pmatrix}$

Optimalitätstest: $u = c^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\end{pmatrix} \ngeq 0$ nicht optimal

Wähle $i_0 = 1$, Anstiegsrichtung $d^0 = -A_B^{-1} e_{i_0} = \begin{pmatrix}-0.5\\ 0.5\end{pmatrix}$

$\alpha_2^T d^0 = 1 > 0,\ \alpha_3^T d^0 = 0,\ j_0 = 2$, Schrittweite: $\lambda = \dfrac{b_2 - \alpha_2^T x^0}{\alpha_2^T d^0} = 4$

(ii) $x^1 = x^0 + \lambda d^0 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ B = (2,4),\ A_B = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix}-0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$

Optimalitätstest: $u = c^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix}1.5 & -0.5\end{pmatrix} \ngeq 0$ nicht optimal

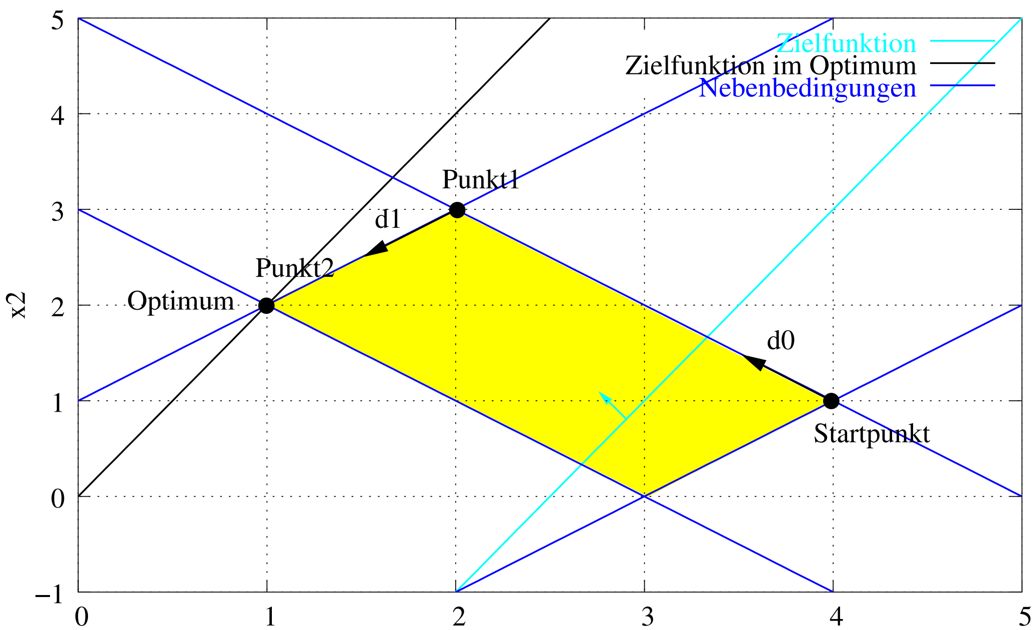
$i_0 = 4$, Anstiegsrichtung $d^1 = -A_B^{-1} e_{i_0} = \begin{pmatrix}-0.5\\ -0.5\end{pmatrix}$

$\alpha_1^T d^1 = 0,\ \alpha_3^T d^1 = 1 > 0,\ j_0 = 3$, Schrittweite: $\lambda = \dfrac{b_3 - \alpha_3^T x^0}{\alpha_3^T d^1} = 2$

(iii) $x^2 = x^1 + \lambda d^1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ B = (2,3),\ A_B = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix}-0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}$

Optimalitätstest: $u = c^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix}1.5 & 0.5\end{pmatrix} \ge 0$ optimal

Optimum: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ mit Zielfunktionswert 0



Aufgabe 9: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein Hellseher wirbt mit folgender Anzeige:

Sage werdenden Eltern das Geschlecht ihres Kindes voraus. Bei Nichteintreffen Geld zurück.

Die Vorhersage kostet 100 Euro, der Hellseher wirft eine (Laplace-) Münze. Die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt ist 0.465. Berechne das ungefähre Jahreseinkommen des Hellsehers, wenn 100 Anfragen pro Monat eintreffen.

Stelle hierzu eine Zufallsvariable „Gewinn" auf und berechne den Erwartungswert.

Wie kann der Hellseher sein Einkommen (bei gleichem Tarif) verbessern?

(**5 Punkte**)

Lösung:

Zufallsereignis „Geschlecht": $\Omega_1 = \{\text{Mädchen}, \text{Junge}\}$, $P_1(\text{Mädchen}) = 0.465$, $P_1(\text{Junge}) = 0.535$

Zufallsereignis „Münzwurf": $\Omega_2 = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $P_2(\text{Kopf}) = p = 0.5$, $P_2(\text{Zahl}) = 1 - p = 0.5$

Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

Wenn Kopf fällt, sagt der Hellseher (o.B.d.A.) Junge, bei Zahl Mädchen.

Zufallsvariable „Gewinn des Hellsehers": $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Funktionswerten und den Wahrscheinlichkeiten (unter der Annahme, daß Vorhersage und tatsächliches Geschlecht unabhängige Ereignisse sind):

ω	$P(\omega)$	$X(\omega)$
(Junge, Kopf)	$0.535 \cdot p$	100
(Mädchen, Zahl)	$0.465 \cdot (1-p)$	100
(Mädchen, Kopf)	$0.465 \cdot p$	0
(Junge, Zahl)	$0.535 \cdot (1-p)$	0

$$P(X = 100) = \sum_{\omega : X(\omega) = 100} P(\omega) = 0.535 \cdot p + 0.465 \cdot (1-p) = 0.465 + 0.070 \cdot p$$

$$P(X = 0) = \sum_{\omega : X(\omega) = 0} P(\omega) = 0.465 \cdot p + 0.535 \cdot (1-p) = 0.535 - 0.070 \cdot p$$

Erwartungswert: $E(X) = 100 \cdot P(X = 100) + 0 \cdot P(X = 0) = 46.5 + 7.0 \cdot p$

Für $p = 0.5$ ist $E(X) = 50$, bei 100 Anfragen im Monat ist das erwartete Jahreseinkommen somit $12 \cdot 100 \cdot 50 = 60000$.

Je größer p ist, desto größer ist der erwartete Gewinn. Maximal wird er für $p = 1$, d. h. wenn der Hellseher, anstatt eine Münze zu werfen, immer Junge als Vorhersage angibt, dann verdient er im Mittel $E(X) = 53.5$ pro Anfrage.