HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank
Jan Riehme, Maciek Korzec

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Probeklausur zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

3.1.2006

Aufgabe 1: **Sei** $D := [0, 1.5]$**, zeige, dass die nichtlineare Gleichung**

$$cos(x) = x$$

genau eine Lösung in D **besitzt und dass die Folge** $x_{n+1} = cos(x_n)$ **mit** $x_0 = 1$ **gegen diese konvergiert.**

Beweis: Wir beweisen die Aufgabe mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes (vgl. Skript Mathematik für Informatiker II, Abschnitt C-6, Satz C.138).

Zeige, dass $\cos(x)$ eine Selbstabbildung auf $[0, 1.5]$ ist: Ist klar, da $\cos(x)$ auf $[0, \pi/2]$ monoton von 1 nach 0 fällt und $1.5 < \pi/2$.

Zeige, dass $\cos(x)$ kontraktiv ist auf $[0, 1.5]$: Nach Mittelwertsatz (vgl. Skript Mathematik für Informatiker II, Abschnitt C-5.1, Satz C.109) existiert zu $x, y \in [0, 1.5], x < y$ ein $\xi \in (x, y)$ so daß

$$\frac{|\cos(x) - \cos(y)|}{|x - y|} = |\cos'(\xi)| = \sin(\xi) < \sin(1.5) =: q < 1 = \sin(\tfrac{\pi}{2})$$

Schon erhält man die gewünschte Ungleichung

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq q|x - y| \quad \forall_{x,y \in [0,1.5]}$$

mit der Kontraktionskonstanten $q < 1$.

$[0, 1.5]$ ist abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$, also sind alle Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt. Dieser sagt, dass es genau ein $x^* \in [0, 1.5]$ gibt mit $\cos(x^*) = x^*$ und jede Folge $((x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} = \cos(x_n)$ und Startwert x_0 aus dem gegebenen abgeschlossenen Intervall konvergiert gegen x^*, insbesondere also die mit $x_0 = 1$. □

Aufgabe 2:

(i) Zeige, dass die Funktion $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ **auf dem Interval** $(0, \infty)$ **streng monoton fällt. Um dieses zu beweisen, berechne die erste Ableitung, ziehe einen gemeinsamen Vorfaktor und Nenner heraus und zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass der verbleibende Faktor negativ ist.**

Beweis: $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ für $x > 0$ monoton fallend. Das kann man mit Hilfe der Ableitung von f einsehen, man zeige, dass diese negativ ist für alle $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)' &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right) \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{(x^2(1+x))}(x - (1+x)\ln(1+x)) \end{aligned}$$

Der Bruch ist immer positiv, also bleibt zu zeigen $\phi(x) := x - (1+x)\ln(x+1) < 0$ für $x > 0$. $\phi(0) = 0$, zeige also dass ϕ streng monoton fällt:

$$\phi'(x) = 1 - \frac{1+x}{1+x} - 1 \cdot \ln(1+x) = -\ln(1+x) < 0 \qquad \forall x > 0.$$

□

(ii) Zeige mit Hilfe von (i), dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - (1 + \frac{1}{n})^n \right)$$

konvergiert.

Beweis: Wegen (i) ist $(e - (1 + \frac{1}{n})^n)$ eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Also kann man das Leibnitzkriterium anwenden, welches besagt, dass eine alternierende Reihe mit derartigen Koeffizienten konvergiert (vgl. Skript Mathe für Informatiker II, Abschnitt C-3.2, Satz C.75). □

Aufgabe 3: **Berechne den Grenzwert von**

$$\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{e^{2x} - 1}).$$

Hinweis: *Die Aufgabe war nicht ganz richtig gestellt, sorry!* Hinweis

Lösung:

Der Grenzwert in dem Sinne existiert nicht. Man kann nur den links- bzw. rechtsseitigen Limes ausrechnen, indem man einmal die Regel von de l'Hospital (vgl. Skript Mathematik für Informatiker II, Abschnitt C-5.1, Satz C.111) anwendet:

$$\lim_{x \to 0_+} (\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{e^{2x} - 1}) = \lim_{x \to 0_+} \frac{e^{2x} - 1 - x^2 + 2x}{(x^2 - 2x)(e^{2x} - 1)}$$

$$\stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \to 0_+} \frac{2e^{2x} - 2x + 2}{(2x - 2)(e^{2x} - 1) + (x^2 - 2x)2e^{2x}} \to -\infty,$$

da beide Summanden im Nenner für kleine positive x negativ sind und gegen 0 streben, während der Zähler gegen 4 geht und somit nach unten beschränkt ist. Analog sieht man, dass $\lim_{x \to 0_-} = \infty$.

Aufgabe 4: **Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \left[(0.5 + (-0.3)^n)(x+4) \right]^{(n+5)}.$$

Was passiert am Rand des Konvergenzintervalles?

Lösung:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \left[(0.5 + (-0.3)^n)(x+4) \right]^{(n+5)} \\ &= \sum_{n=5}^{\infty} \left[(n-5)^3 (0.5 + (-0.3)^{(n-5)})^n \right] (x+4)^n \\ &= \sum_{n=5}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \end{aligned}$$

wobei $a_n := (n-5)^3(0.5+(-0.3)^{(n-5)})^n$ und $x_0 := -4$.

Man sieht somit, dass die Reihe eine Potenzreihe ist. Für diese verwende man die Formel von Cauchy-Hadamard (vgl. Skript Mathematik für Informatiker II, Abschnitt C-5.5, Satz C.132), um den Konvergenzradius zu bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|(n-5)^{\frac{3}{n}}\left(0.5+(-0.3)^{(n-5)}\right)\right| = \frac{1}{2} \quad ,$$

da $0.3^{(n-5)}$ gegen Null und $(n-5)^{\frac{3}{n}}$ gegen 1 konvergiert.

Zweiteres folgt, weil dieser Faktor kleiner ist als $(n^{\frac{1}{n}})^3(\to 1, \quad$ vgl. Übung Semester II), und für alle $n > 6$ auch größer ist als 1, wodurch das "Sandwichlemma" gilt (vlg. Skript Mathematik für Informatiker II, Abschnitt C-2.1, Satz C.47).

Also ist der Konvergenzradius r gegeben durch

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}} = 2.$$

Da Konvergenz gilt für $|x-x_0| < 2$, also für $x \in (-6,-2)$. An den Rändern, $x=-2$ und $x=-6$ konvergiert sie nicht, denn laut Satz C.61 im Abschnitt C-3.1 vom Skript Mathematik für Informatiker II müsste dafür $a_n 2^n$ bzw. $a_n(-2)^n$ Nullfolge sein. Zeige bloß $a_n 2^n$, zweiter Fall geht analog:

$$a_{2n+1}2^{2n+1} = (2n-4)^3(1+2\cdot 0.3^{(2n-4)})^{2n+1} \geq (2n-4)^3 \to \infty.$$

Aufgabe 5: **Floating - Point - Arithmetik**

Bestimme den maximalen Rundungsfehler, der bei Auswertung des Ausdrucks

$$p = (a\cdot b + c)\cdot(d+e)$$

enstehen kann. Benutze zur Vereinfachung die Werte $a=2$**,** $b=3$**,** $c=2$**,** $d=3$ **und** $e=2$**.**

Lösung:

$$p = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{a\cdot b}_{=:p_1} + c}_{=:s_1}) \cdot (\underbrace{d+e}_{=:s_2}))}_{=:p_2}$$

Das Ergebnis einer Gleitkommaoperation $\circ \in \{+,-,*,/\}$ kann geschrieben werden als $fl(a\circ b) = (a\circ b)\cdot(1+\varepsilon)$ mit $|\varepsilon| \leq$ eps, wobei $a\circ b$ das exakte Ergebnis der Operation $\circ$ und ε die relative Maschinengenauigkeit (eps $\approx 2^{-l}$) bezeichnet.

Aus dem Mittelwertsatz folgt, das für das Produkt $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$ immer ein ε_3 gefunden werden kann mit $|\varepsilon_3| \leq$ eps, so daß gilt

$$(1-\varepsilon_3)^2 \leq (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \leq (1+\varepsilon_3)^2.$$

Mit der Abkürzung $\square := 1+\tilde{\varepsilon}$ für beliebige $\tilde{\varepsilon}$ mit $|\tilde{\varepsilon}| \leq$ eps kann man nun schreiben:

$$\begin{array}{lllllll} p_1 & = & fl(a\cdot b) & = & (2\cdot 3)\cdot(1+\varepsilon_1) & = & 6\,\square \\ s_1 & = & fl(p_1+c) & = & (6\,\square+2)\cdot\square & = & 6\,\square^2+2\,\square \\ s_2 & = & fl(d+e) & = & (3+2)\cdot\square & = & 5\,\square \\ p_2 & = & fl(s_1\cdot s_2) & = & (6\,\square^2+2\square)\cdot(5\,\square)\cdot\square & = & 30\,\square^4+10\,\square^3 \end{array}$$

Linearisieren liefert

$$p_2 = 30(1+\tilde{\varepsilon})^4 + 10(1+\tilde{\varepsilon})^3 \approxeq 4\cdot 30(1+\tilde{\varepsilon}) \; + \; 3\cdot 10(1+\tilde{\varepsilon}) = 40 + 150\tilde{\varepsilon}$$

Mit $p=40$ und $|\tilde{\varepsilon}| \leq$ eps folgt für den maximalen Fehler nun

$$|p_2 - p| \;\leq\; \mathbf{150\,eps}.$$

Der bei der Berechnung des Wertes $p = (2\cdot 3+2)\cdot(3+2)$ in Floating - Point - Arithmetik maximal zu erwartende Fehler ist also so groß wie die 150-fache relative Maschinengenauigkeit eps.

Aufgabe 6: **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

Löse die Differentialgleichung

$$x \cdot y' - \sqrt{y} = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ **exakt!**

Lösung:Die ODE

$$x \cdot y' - \sqrt{y} = 0$$
$$y' = \underbrace{\sqrt{y}}_{=g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f(x)}$$

ist separabel und es gilt $g(y) = \sqrt{y} \neq 0$ für $y > 0$. Damit kann **Satz D.13** zur Anwendung kommen:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_1^x 1/tdt \quad = ln(|t|)\Big|_1^x = \ln(x) - 0 \quad = \boxed{\ln(x)}$$
$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt = \int_1^y t^{-\frac{1}{2}}dt \quad = 2\sqrt{t}\Big|_1^y = 2(\sqrt{y} - 1) \quad = \boxed{2\sqrt{y} - 2}$$

Nun die Umkehrfunktion zu $z = G(y)$ bilden:

$$2\sqrt{y} - 2 = z$$
$$\sqrt{y} = \tfrac{1}{2}(z + 2)$$
$$y = \tfrac{1}{4}(z + 2)^2 = G^{-1}(z)$$

und schliesslich $F(x)$ anstelle von z in $y = G^{-1}(z)$ einsetzen:

$$y = G^{-1}(F(x)) = \boxed{\tfrac{1}{4}(\ln(x) + 2)^2 = y(x)}$$

Also ist $y(x) = \frac{1}{4}(\ln(x) + 2)^2$ die gesuchte exakte Lösung der ODE.

Probe: Anfangswert prüfen:

$$y(1) = \tfrac{1}{4}(\ln(1) + 2)^2 = \tfrac{1}{4}(0 + 2)^2 = 1$$

Differenzieren liefert

$$\frac{dy}{dx} = y' = \underbrace{2 \cdot \tfrac{1}{4}(\ln(x) + 2)}_{\sqrt{y(x)}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{y}}{x},$$

also

$$x \cdot y' - \sqrt{y} = 0$$

Führe einen Schritt der Mittelpunktsregel mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ **durch!**

Lösung:

Mit $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ und $h = \frac{1}{2}$ ergibt sich bei Anwendung der Mittelpunktsregel

$$\tilde{y}_1 = y_0 + \tfrac{h}{2} f(x_0, y_0) \quad = 1 + \tfrac{1}{2+2}\tfrac{\sqrt{1}}{1} = \tfrac{5}{4}$$
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, \tilde{y}_1) \quad = 1 + \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = 1 + \tfrac{\sqrt{5}}{5} \quad = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

Aufgabe 7: Ausgleichsrechnung, Lineare Funktionenapproximation

Seien die Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 1$ **und zugehörige Messwerte** $y_1 = .5$, $y_2 = 0$, $y_3 = -.5$ **und** $y_4 = 1$ **gegeben.**

Die Lösung der Gaußschen Ausgleichsaufgabe ist eine Linearkombination $\sum_{j=1}^{m} z_j u_j(x)$ **der Ansatzfunktionen** $u_j(x), j = 1, \ldots, m$, **wobei die Bestimmung der Koeffizienten** z_j **als Lösung des Optimierungsproblems** $\|Az - y\| \longrightarrow \min$ **erfolgen kann.**

Schreibe das dabei entstehende überbestimmte lineare Gleichungssystem $Az = y$ für die Ansatzfunktionen

$$u_1(x) = x \qquad u_2(x) = 1 - x \qquad u_3(x) = x(1-x)$$

auf!

Lösung:

Die Spalten der Systemmatrix A ergeben sich aus der Anwendung der gegebenen Ansatzfunktionen $u_j(x)$ auf die gegebenen Stützstellen x_i:

x	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$
0	0	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
1	1	0	0

$$\Longrightarrow \quad \boxed{Az = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = y}$$

Gib auch das Normalensystem an, welches dasjenige z erfüllt, das die Euklidische Norm von $Az - y$ minimiert!

Lösung:

$$A^T Az = \begin{bmatrix} \frac{14}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{14}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{81} \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix} = A^T y$$

Aufgabe 8: Lineare Optimierung

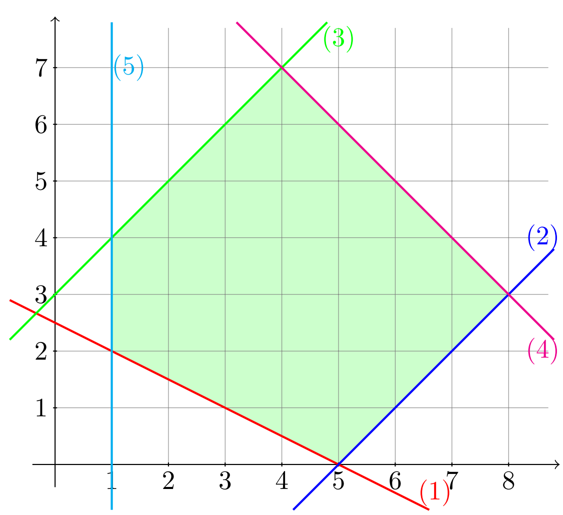
$$\begin{array}{llcccl} \min & x_1 + x_2 & & & & \\ \textit{bei} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq & -3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ & x_1 & & & \geq & 1 \end{array}$$

(i) Löse das obige Optimierungsproblem grafisch.

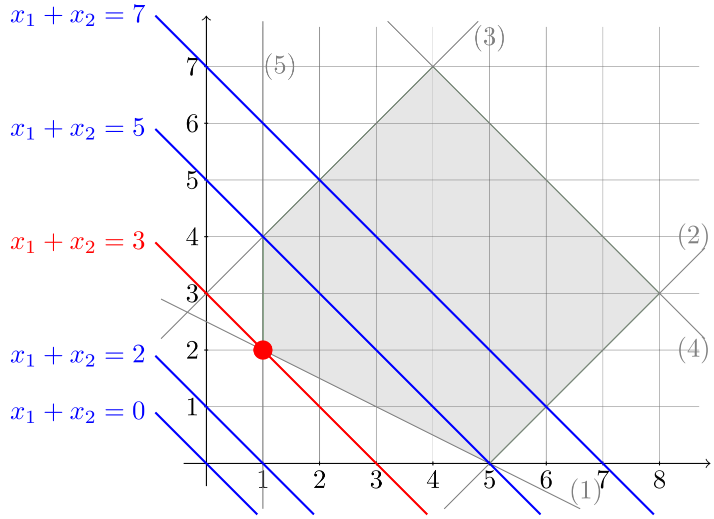
Lösung:

Zur grafischen Lösung macht es Sinn, alle Nebenbedingungen und die Zielfunktion so umzuschreiben, dass x_2 allein auf der linken Seite steht (wenn möglich):

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & -3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & & & \geq & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{lll} x_2 & \geq & -\frac{1}{2}x_1 + 2.5 \\ x_2 & \geq & x_1 - 5 \\ x_2 & \leq & x_1 + 3 \\ x_2 & \leq & -x_1 + 11 \\ x_1 & \geq & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$



Dann ist noch Höhenlinien der Zielfunktion zu zeichnen:



Somit ist $(1,2)^T$ die Optimallösung und $z^* = 3$ ist der zugehörige optimale Zielfunktionswert.

(ii) Löse das obige Optimierungsproblem mit dem in der Vorlesung angegebenen Simplexverfahren. Benutze $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = (\mathbf{5}, \mathbf{0})$ als Startecke.

Lösung:
Umschreiben des LP in Form

$$\max c^T x$$
$$\textit{bei} \qquad Ax \le b$$

liefert

$$\begin{array}{lrcrcr} \min x_1 + x_2 & & & & & \\ \text{bei} & x_1 & + & 2x_2 & \ge & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \ge & -3 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 11 \\ & x_1 & & & \ge & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{lrcrcrl} \max -x_1 - x_2 & & & & & & \\ \text{bei} & -x_1 & - & 2x_2 & \le & -5 & (1') \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 5 & (2') \\ & -x_1 & + & x_2 & \le & 3 & (3') \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 11 & (4') \\ & -x_1 & & & \le & -1 & (5') \end{array}$$

Damit haben wir mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = (-1,-1)^T, \quad b = (-5, 5, 3, 11, -1)^T$$

ein Optimierungsproblem in der für die geometrische Variante des Simplexverfahrens erforderlichen Form.
Als Startecke des Simplexverfahrens wird der angegebene Punkt $x^0 = (5,0)^T$ benutzt.

(S0) **Starte mit einer zulässigen Ecke $x^0 \in I\!R^n$.**
Im Punkt $x^0 = (5,0)^T$ sind die Ungleichungen $(1')$ und $(2')$ mit Gleichheit erfüllt, d.h. 1 und 2 bilden die Zeilenindexmenge oder Basis $B = (1,2)$. Wir haben also

$$x^0 = (5,0)^T, \qquad B = \{1,2\}, \qquad A_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_B = (-5,5)^T.$$

Die zugehörige Basisinverse ist

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(S1) **Ist x^0 optimal?**

$$u^T := c^T A_B^{-1} = (-1,-1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}) \not\ge 0$$

$\Longrightarrow x^0$ nicht optimal.

(S2) **Finde eine Richtung mit nicht abnehmender Zielfunktion.**

$$u_2 < 0 \quad \Longrightarrow i_0 = 2$$

Hinweis: *Zur Bestimmung der Richtung mit nicht abnehmender Zielfunktion muß die Inverse der Basismatrix mit dem Einheitsvektor $e_{\tilde{i}_0}$ multipliziert. Der Index $\tilde{i}_0$ ist dabei die Nummer der Zeile der Basismatrix, in der die Nebenbedingung (i_0) steht.*

Hinweis

Ende Hinweis

Damit ergibt sich die gesuchte Richtung d als

$$d = -A_B^{-1} e_{i_0} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(S3) **Ist das Problem unbeschränkt?**

$$\begin{array}{llll} j=3: & \alpha_3^T d = (-1,1)(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T & =1 & >0 \\ j=4: & \alpha_4^T d = (1,1)(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T & =-\frac{1}{3} & \leq 0 \\ j=5: & \alpha_5^T d = (-1,0)(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T & =\frac{2}{3} & >0 \end{array}$$

Damit ist das Problem beschränkt, da $\alpha_3^T d < 0$ und $\alpha_5^T d < 0$ gilt.

(S4) **Bestimme die Schrittweite, um zur nächsten zulässigen Ecke zu gehen.**

$$\lambda = \min\left\{\frac{b_j - \alpha_j^T x^0}{\alpha_j^T d}, j \in N, \alpha_j^T d > 0\right\}$$

$\{j \in N | \alpha_j^T d > 0\} = \{3,5\}$:

$$\begin{array}{lll} j=3: & \lambda_3 = \dfrac{3-(-1,1)(5,0)^T}{1} & = 3+5 = 8 \\ j=5: & \lambda_5 = \dfrac{-1-(-1,0)(5,0)^T}{2/3} & = \frac{3}{2}(-1+5) = 6 \end{array}$$

Also $\lambda = \min\{\lambda_3, \lambda_5\} = \lambda = 6$ und $j_0 = 5$.

(S5) **Gehe zur nächsten Ecke.**

$$x^1 = x^0 + \lambda \cdot d = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x^1$$

und

$$B = B \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\} = \{1,2\} \setminus \{2\} \cup \{5\} = \{1,5\}$$

und damit

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_B = (-5,-1)^T.$$

(S1) **Ist x^1 optimal?**

$$u^T := c^T A_B^{-1} = (-1,-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(0+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$\Longrightarrow x^1 = (1,2)^T$ ist optimal.

$\Longrightarrow$ Optimaler Zielfunktionswert $z'^* = c^T x^1 = (-1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3$ und damit als optimaler Wert des Ausgangsproblems $z^* = 3$.