HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. Andreas Griewank
Jan Riehme, Maciek Korzec

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Probeklausur zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

3.1.2006

Aufgabe 1: Sei $D := [0, 1.5]$, zeige, dass die nichtlineare Gleichung

$$cos(x) = x$$

genau eine Lösung in D besitzt und dass die Folge $x_{n+1} = cos(x_n)$ mit $x_0 = 1$ gegen diese konvergiert.

Aufgabe 2:

(i) Zeige, dass die Funktion $f(x) = (1+x)^{1/x}$ auf dem Interval $(0, \infty)$ streng monoton fällt. Um dieses zu beweisen, berechne die erste Ableitung, ziehe einen gemeinsamen Vorfaktor und Nenner heraus und zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass der verbleibende Faktor negativ ist.

(ii) Zeige mit Hilfe von (a), dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - (1 + \frac{1}{n})^n \right)$$

konvergiert.

Aufgabe 3: Berechne den Grenzwert von

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right).$$

Aufgabe 4: Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \left[(0.5 + (-0.3)^n)(x+4) \right]^{(n+5)}.$$

Was passiert am Rand des Konvergenzintervalles?

Aufgabe 5: Floating - Point - Arithmetik

Bestimme den maximalen Rundungsfehler, der bei Auswertung des Ausdrucks

$$p = (a \cdot b + c) \cdot (d + e)$$

enstehen kann. Benutze zur Vereinfachung die Werte $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 3$ und $e = 2$.

Aufgabe 6: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Löse die Differentialgleichung

$$x \cdot y' - \sqrt{y} = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ exakt!

Führe einen Schritt der Mittelpunktsregel mit der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ durch!

Aufgabe 7: Ausgleichsrechnung, Lineare Funktionenapproximation

Seien die Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 1$ und zugehörige Messwerte $y_1 = .5$, $y_2 = 0$, $y_3 = -.5$ und $y_4 = 1$ gegeben.

Die Lösung der Gaußschen Ausgleichsaufgabe ist eine Linearkombination $\sum_{j=1}^{m} z_j u_j(x)$ der Ansatzfunktionen $u_j(x), j = 1, \ldots, m$, wobei die Bestimmung der Koeffizienten z_j als Lösung des Optimierungsproblems $\|Az - y\| \longrightarrow \min$ erfolgen kann.

Schreibe das dabei entstehende überbestimmte lineare Gleichungssystem $Az = y$ für die Ansatzfunktionen

$$u_1(x) = x \qquad u_2(x) = 1 - x \qquad u_3(x) = x(1 - x)$$

auf!

Gib auch das Normalensystem an, welches dasjenige z erfüllt, das die Euklidische Norm von $Az - y$ minimiert!

Aufgabe 8: Lineare Optimierung

$$\begin{array}{lllllll}
\min & x_1 + x_2 & & & & & \\
 & \textit{bei} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 5 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq & -3 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\
 & & x_1 & & & \geq & 1
\end{array}$$

(i) Löse das obige Optimierungsproblem grafisch.

(ii) Löse das obige Optimierungsproblem mit dem in der Vorlesung angegebenen Simplexverfahren. Benutze $(x_1, x_2) = (5, 0)$ als Startecke.

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5859 e-mail: griewank@math.hu-berlin.de riehme@math.hu-berlin.de
http://www.mathematik.hu-berlin.de/~gaggle/MATHINF