

Mathematik für Informatiker II

Andreas Griewank
(griewank@math.hu-berlin.de)

Wiss. Mitarbeiter:

Jan Riehme (riehme@math.hu-berlin.de)
Andrej Ponomarenko (andrej@math.hu-berlin.de)
Heinz Jürgen Lange (lange@math.hu-berlin.de)

9. März 2006

Inhaltsverzeichnis

C	Analysis	2
C-1	Einführung der reellen Zahlen	3
C-1.1	Axiomensystem der reellen Zahlen \mathbb{R}	3
C-1.2	Zifferndarstellung reeller Zahlen	5
C-1.3	Rationale und irrationale Zahlen	6
C-1.4	Mengenvergleiche	6
C-2	Folgen und ihre Grenzwerte	7
C-2.1	Definition, Konvergenz	7
C-2.2	Landau-Symbole	9
C-3	Unendliche Reihen	11
C-3.1	Definition, Konvergenz	11
C-3.2	Konvergenzkriterien	13
C-4	Stetigkeit	15
C-4.1	Grenzwerte von Funktionen	15
C-4.2	Stetigkeit reeller Funktionen	15
C-4.3	Gleichmäßige Stetigkeit	16
C-4.4	Wichtige stetige Funktionen	17
C-5	Differenzierbarkeit	19
C-5.1	Sätze über differenzierbare Funktionen	21
C-5.2	Höhere Ableitungen	22
C-5.3	Geometrische Bedeutung der Ableitung	22
C-5.4	Der Satz von Taylor	24
C-5.5	Potenzreihen	25
C-5.6	Taylorreihen	26
C-6	Fixpunkt-Iteration	27
C-6.1	Newton-Verfahren	28
C-6.2	Implizites Differenzieren	29
C-7	Integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	30
C-7.1	Das bestimmte Integral	30
C-7.2	Das unbestimmte Integral und die Stammfunktion	32
C-7.3	Uneigentliche Integrale	34
C-7.4	Anwendungen der Integralrechnung	35
C-7.5	Mehrfachintegrale	38
C-8	Zusammenfassung	41

Teil C

Analysis

Inhaltsangabe

C-1 Einführung der reellen Zahlen	3
C-1.1 Axiomensystem der reellen Zahlen \mathbb{R}	3
C-1.2 Zifferndarstellung reeller Zahlen	5
C-1.3 Rationale und irrationale Zahlen	6
C-1.4 Mengenvergleiche	6
C-2 Folgen und ihre Grenzwerte	7
C-2.1 Definition, Konvergenz	7
C-2.2 Landau-Symbole	9
C-3 Unendliche Reihen	11
C-3.1 Definition, Konvergenz	11
C-3.2 Konvergenzkriterien	13
C-4 Stetigkeit	15
C-4.1 Grenzwerte von Funktionen	15
C-4.2 Stetigkeit reeller Funktionen	15
C-4.3 Gleichmäßige Stetigkeit	16
C-4.4 Wichtige stetige Funktionen	17
C-5 Differenzierbarkeit	19
C-5.1 Sätze über differenzierbare Funktionen	21
C-5.2 Höhere Ableitungen	22
C-5.3 Geometrische Bedeutung der Ableitung	22
C-5.4 Der Satz von Taylor	24
C-5.5 Potenzreihen	25
C-5.6 Taylorreihen	26
C-6 Fixpunkt-Iteration	27
C-6.1 Newton-Verfahren	28
C-6.2 Implizites Differenzieren	29
C-7 Integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	30
C-7.1 Das bestimmte Integral	30
C-7.2 Das unbestimmte Integral und die Stammfunktion	32
C-7.3 Uneigentliche Integrale	34
C-7.4 Anwendungen der Integralrechnung	35
C-7.5 Mehrfachintegrale	38
C-8 Zusammenfassung	41

C-1 Einführung der reellen Zahlen

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

L. Kronecker

C-1.1 Axiomensystem der reellen Zahlen \mathbb{R}

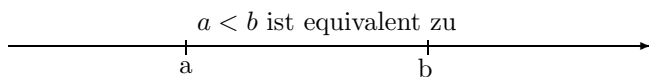
1. Axiome der Addition und Multiplikation
2. Axiome der Anordnung
3. Vollständigkeitsaxiom
4. Archimedisches Axiom

(i) Axiome der Addition und Multiplikation

Siehe Körpereigenschaften von \mathbb{R}

(ii) Axiome der Anordnung

Das Zeichen " $<$ " heißt "links von" auf dem Zahlenstrahl



$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Es gilt genau eine der Beziehungen: (Trichotomie)
 $a < b, \quad a = b, \quad b < a$
2. $a < b$ und $b < c \implies a < c$ (transitivität)
3. $a < b \implies a + c < b + c$ (Monotonie bzgl. +)
4. $a < b$ und $0 < c \implies a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonie bzgl. \cdot)

Zahlen links von Null (< 0) heißen negativ, rechts von Null (> 0) heißen positiv.

Definition C.1 ("größer", "kleiner gleich", "größer gleich"). $a > b \iff b < a$

- $a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b)$
- $a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b)$

Definition C.2 (Bezeichnungen). $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offen
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffen
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffen
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ $\mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

Betrag einer reellen Zahl

Definition C.3.

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$$\implies |a| \geq 0 \quad \text{und} \quad |a| = 0 \iff a = 0$$

Satz C.4 (1.Dreiecksungleichung und 2.Dreiecksungleichung).

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

(Vergleiche Normeigenschaften)

Bemerkung:

Durch Induktion nach n erhält man die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$$

(iii) Vollständigkeitsaxiom

Definition C.5. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl s mit $x \leq s, \forall x \in M$ heißt *obere Schranke* von M . Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x \geq t, \forall x \in M$, so heißt t *untere Schranke* von M . Die Menge M heißt dann entsprechend *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*. Falls beides, so ist M *beschränkt*.

Definition C.6. m heißt *kleinstes Element* oder *Minimum* von M ($m = \min M$), wenn $m \in M$ und m untere Schranke von M ist.

Analog definiert man *Maximum*.

Beispiel C.7. \mathbb{R}^+ ist nicht nach oben beschränkt, aber nach unten. 0 ist eine untere Schranke. \mathbb{R}^+ besitzt aber kein Minimum!

$[a, b]$ besitzt das Minimum a und das Maximum b .

(a, b) enthält weder ein Minimum noch ein Maximum.

b – obere Schranke, a – untere Schranke.

Definition C.8 (Supremum, Infimum). Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$

$s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von M ($s = \sup M$) \iff
 s ist kleinste obere Schranke von M .

$t \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* von M ($t = \inf M$) \iff
 t ist größte untere Schranke von M .

Alternativ:

$$s = \sup M \iff (x \leq s, \forall x \in M) \text{ und } (\forall s' < s \exists x \in M : s' < x \leq s)$$

Analog für Infimum.

Das Vollständigkeitsaxiom von \mathbb{R} sagt:

Jede nicht leere, nach oben (unten) beschränkte Menge besitzt ein Supremum (Infimum).

Erweiterung

$$\inf\{\emptyset\} = +\infty \quad \sup\{\emptyset\} = -\infty \quad \inf\{\mathbb{R}\} = -\infty \quad \sup\{\mathbb{R}\} = +\infty$$

Bemerkung:

Besitzt eine Menge ein Maximum, so ist dies gleichzeitig das Supremum. Besitzt eine Menge ein Minimum, so ist dies gleichzeitig das Infimum.

Beispiel C.9. Sei $M = [0, 1)$. Es folgt $\min M = 0 = \inf M, \sup M = 1$. M besitzt kein Maximum aber ein Minimum.

Definition C.10.

$$\sqrt{2} := \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < 2\}$$

Bemerkung:

In \mathbb{Q} gilt das Vollständigkeitsaxiom nicht! Zum Beispiel hat die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ kein Supremum in \mathbb{Q} (es gibt keine größte rationale Zahl kleiner als $\sqrt{2}$).

(iv) Archimedisches Axiom

Dieses wird oft auch als Axiom des Eudoxus bezeichnet.

Sind a und b zwei positive reelle Zahlen, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$na > b$$

C-1.2 Zifferndarstellung reeller Zahlen

Gegeben Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Wir finden $z_0 \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z_0 \leq a < z_0 + 1$$

Nun teilen wir das Intervall $[z_0, z_0 + 1)$ in 10 gleichlange rechthoekige Teilintervalle. Dann existiert ein $z_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$, so dass

$$z_0 + \frac{z_1}{10} \leq a < z_0 + \frac{z_1 + 1}{10}$$

Nun wird das Intervall $[z_0 + \frac{z_1}{10}, z_0 + \frac{z_1 + 1}{10})$ in 10 gleichlange rechthoekige Teilintervalle zerlegt. Wie oben findet man eine ganze Zahl z_2 , so dass

$$z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2 + 1}{10^2}$$

usw...

Definition C.11. hierfür schreibt man kurz:

$$a = z_0.z_1z_2\dots$$

und nennt die rechte Seite *Dezimalbruchdarstellung* der positiven reellen Zahl a . Die Zahlen $z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, i = 1, 2, \dots$ heißen *Ziffern*.

Im Falle $a < 0$ wendet man die obige Konstruktion auf $-a$ an und erhält $-a = z_0.z_1z_2\dots$. Dafür schreibt man $a = -z_0.z_1z_2\dots$

Beispiel C.12. Die Dezimalbruchdarstellung $a = 35.704\dots$ bedeutet

$$35 + \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{4}{10^3} \leq a < 35 + \frac{7}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

Beispiel C.13. $-1/4 = -0.2500\dots$, wobei alle weiteren Ziffern 0 sind. In diesem Fall sagt man der Dezimalbruch sei *endlich* und schreibt einfach $-1/4 = -0.25$.

Beispiel C.14. In der Darstellung $a = 0.727272\dots$ wiederhole sich ständig die Ziffernfolge 72. Man sagt der Dezimalbruch sei *periodisch* und schreibt

$$a = 0.\overline{72} \quad \text{oder} \quad a = 0.(72)$$

Hieraus kann man a als Bruch ermitteln: $100a - a = 72.\overline{72} - 0.\overline{72} = 72$. Es folgt also $a = 72/99 = 8/11$.

Verallgemeinerung der Beispiele

Jede reelle Zahl a ist als Dezimalbruch darstellbar. Dieser ist genau dann endlich oder periodisch, wenn die Zahl a *rational* ist.

g -adische Darstellung

Der Dezimalbruchdarstellung von $a \in \mathbb{R}$ liegt die fortlaufende Teilung eines Intervalls in 10 gleichlange Intervalle zugrunde.

Statt der Grundzahl $g = 10$ kann man auch jede andere natürliche Zahl $g \geq 2$ zugrundelegen. Hierdurch erhält man die g -adische Darstellung von a die man z.B. in der Form $a = z_0.z_1z_2\dots|_g$ schreibt, womit die Einschließung

$$z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2 + 1}{g^2}$$

gemeint ist. Hier sind $z_i \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$.

Speziell für $g = 2$ ergibt sich die *binare Darstellung* oder *Dualzahldarstellung*, die in Computern intern verwendet wird.

Beispiel C.15. $1/3 = 0.0101\dots|_2 = 0.\overline{01}|_2$.

C-1.3 Rationale und irrationale Zahlen

Aus der Definition der rationalen Zahl als Quotient zweier ganzer Zahlen folgt unmittelbar der

Satz C.16. *Zwischen zwei rationalen Zahlen a und $b > a$ liegen unendlich viele (voneinander verschiedene) rationale Zahlen.*

Lemma C.17. *Jede nicht leere Menge M natürlicher Zahlen enthält eine kleinste.*

Satz C.18. *Zwischen zwei reellen Zahlen a und $b > a$ liegen unendlich viele rationale Zahlen.*

Definition C.19. Hat eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ die Eigenschaft:

$$\forall a, b \in M (b > a) \quad \exists c \in M : a < c < b$$

so sagt man, M sei *überall dicht*, oder die Zahlen von M *liegen überall dicht*.

Die vorigen Sätze C.16 und C.18 lassen sich also so formulieren:

Folgerung C.20. *Die Mengen \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind überall dicht.*

Irrationale Zahlen

Definition C.21. Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt irrational ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Lemma C.22. *Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$, so folgt*

$$\begin{array}{l} a + b, a - b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{und} \\ ab, a/b, b/a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \text{falls } b \neq 0 \end{array}$$

Satz C.23. *Gibt es überhaupt eine irrationale Zahl, so liegen zwischen je zwei reellen Zahlen a und $b > a$ unendlich viele irrationale Zahlen. (D.h. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überall dicht)*

Existenz von irrationalen Zahlen

Satz C.24. *Es gibt keine rationale Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.*

Folgerung C.25. *Es sei $g \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Ist g nicht k -te Potenz einer natürlichen Zahl, so hat die Gleichung $x^k = g$ keine rationale Lösung.*

C-1.4 Mengenvergleiche

Definition C.26 (nach Cantor). Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $A \rightarrow B$ gibt. Ferner sagt man, B *habe eine größere Mächtigkeit als A* , wenn zwar A zu einer Teilmenge von B gleichmächtig ist, B aber zu keiner Teilmenge von A .

Definition C.27. Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen.

Definition C.28. Die Anzahl der Elementen einer Menge M nennt man *Kardinalzahl* und schreibt dafür $|M|$. Als Symbol für die Kardinalzahl $|\mathbb{N}|$ wird \aleph_0 benutzt.

Lemma C.29. *Die Menge \mathbb{Z} ist abzählbar ($|\mathbb{Z}| = \aleph_0$).*

Satz C.30. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Folgerung C.31. *Eine Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Satz C.32. *Das Intervall $[0, 1]$ ist nicht abzählbar (überabzählbar).*

Folgerung C.33. *Die Menge \mathbb{R} ist nicht abzählbar.*

Folgerung C.34. *Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist nicht abzählbar.*

C - 2 Folgen und ihre Grenzwerte

C - 2.1 Definition, Konvergenz

Definition C.35 (Folge). Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \in f(n) =: a_n$ heißt (reellwertige) Folge. Wir nennen a_n das n -te Glied der Folge und kürzen die Folge mit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{a_n\}$ oder einfach a_n ab.

Bemerkung:

Viele der nachfolgenden Resultate (aber nicht alle) lassen sich verallgemeinern auf Folgen mit anderen Wertebereichen, z.B. \mathbb{C}, \mathbb{R}^n .

Beispiel C.36. (a) konstante Folge $a_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

(c) Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1, a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 3$ Sie ergibt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

Definition C.37 ((streng) monoton fallend/wachsend). Eine reellwertige Folge $\{a_n\}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ist. Gilt sogar $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $\{a_n\}$ *streng monoton wachsend*. Analog definiert man (streng) *monoton fallend*.

Definition C.38 (beschränkt). $\{a_n\}$ heißt *nach oben/unten beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben/unten beschränkt ist.

Bemerkung:

$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ und $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ werden als *Supremum/Infimum* von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Definition C.39 (ε - Umgebung). Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von a .

Definition C.40 (konvergente Folge). Eine Folge $\{a_n\}$ heißt *konvergent* gegen a , wenn in jeder ε -Umgebung von a "fast alle" Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |x - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ und nennt a den *Grenzwert (Limes)* von $\{a_n\}$.

Eine reellwertige Folge heißt *divergent*, wenn es keinen solchen Grenzwert gibt.

Definition C.41. Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen *Nullfolgen*.

Beispiel C.42. (a) Die konstante Folge ist konvergent:

$$a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn:

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Wegen

$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}, \forall n \geq n_0$ ist also

$$\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0), \quad \forall n \geq n_0$$

(c) Die Folge $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Definition C.43 (uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz). Sei $\{a_n\}$ eine Folge. Dann strebt a_n gegen ∞ , ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$), falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > r, \forall n \geq n_0$. In diesem Fall spricht man auch von *uneigentlicher Konvergenz* oder *bestimmter Divergenz*.

Analog definiert man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < r, \forall n \geq n_0$.

Beispiel C.44. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

Satz C.45 (Beschränktheit konvergenter Folgen). Eine konvergente Folge ist beschränkt, d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

Satz C.46 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Satz C.47 (Konvergenzkriterien). 1. Vergleichskriterium: Seien $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Dann konvergiert $\{b_n\}$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

2. Cauchy-Kriterium: Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon)$$

3. Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert.

Beispiel C.48. $\{\frac{1}{n^2}\}$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt. Also ist diese Folge nach C.47 (3) konvergent.

Satz C.49 (Rechenregeln für Grenzwerte). Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ reelle Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

(a) Falls $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

(b) Falls $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$ ($a < b$ ist i.A. falsch!).

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n \pm b_n\} = a \pm b$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n \cdot b_n\} = a \cdot b$ (d.h. insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} \{c \cdot a_n\} = c \cdot a$).

(e) Ist $b \neq 0$, so existiert n_0 mit $b_n \neq 0, \forall n \geq n_0$. Dann sind auch $\{\frac{1}{b_n}\}_{n \geq n_0}, \{\frac{a_n}{b_n}\}_{n \geq n_0}$ konvergent und haben den Limes $\frac{1}{b}$ bzw. $\frac{a}{b}$.

(f) $\{|a_n|\}$ konvergiert gegen $|a|$.

(g) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{a}$.

Beispiel C.50. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17}{n} = 17 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 17 \cdot 0 = 0$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} &= 1 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 2n^2 + 1}{7n^4 + 11n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{11}{n} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{5}{7}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (wird in der Übung besprochen)

C-2.2 Landau-Symbole

Definition C.51. Eine Folge $A = \{a_n\}$ ist "Groß-O" von $B = \{b_n\}$, wenn der Quotient $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ beschränkt ist. Die Folge A ist "Klein-o" von B , wenn $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ eine Nullfolge ist. Wir schreiben $A = O(B)$ bzw. $A = o(B)$. O und o nennt man auch *Landau-Symbole*.

Beispiel C.52. (a) $2n^2 + 3n + 4 = O(n^2)$

(b) $2n^2 + 3n + 4 = o(n^3)$

Notation:

Im folgenden verknüpfen wir Folgen komponentenweise, so dass für $\circ \in \{+, -, *\}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante:

$$A \circ B = \{a_n \circ b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad c \cdot A = \{c \cdot a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Mehrdeutigkeit

Die Angabe $A = O(B)$ ist nicht eindeutig. Für $A = \{n + 2\}$ sind z.B.:

$$\begin{aligned} A &= O(n^2), \\ A &= O(n), \\ A &= O\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

wahre Aussagen. Es gilt:

- Konstante Faktoren ändern nicht die Ordnung. $O(B) = O(c \cdot B), \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- Terme niedriger Ordnung sind unwichtig:
z.B. haben $\{n^2 + 3n + 4\}$ und $\{n^2 + 17n\}$ dieselbe Ordnung $O(n^2)$.

Satz C.53 (Rechenregeln für Landau-Symbole). Für reelle Zahlenfolgen A, B, C und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $A = O(A), B = o(A) \Rightarrow B = O(A)$

(b) $c \cdot A = O(A)$

(c) $B = O(A) \wedge C = O(A) \Rightarrow B \pm C = O(A)$
 $B = o(A) \wedge C = o(A) \Rightarrow B \pm C = o(A)$

(d) $A' = O(A) \wedge B' = O(B) \Rightarrow A' \cdot B' = O(A \cdot B)$

(e) $\left. \begin{array}{l} A = O(B), B = O(C) \Rightarrow A = O(C) \\ A = o(B), B = o(C) \Rightarrow A = o(C) \end{array} \right\} \text{Transitivität}$

Nicht alle Folgen sind vergleichbar. Betrachte z.B. $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}$ mit

$$a_n = \begin{cases} n^2 & (n \text{ gerade}) \\ n & (n \text{ ungerade}) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} n & (n \text{ gerade}) \\ n^2 & (n \text{ ungerade}) \end{cases}$$

Für gerades n sieht man, dass $A \neq O(B)$.

Für ungerades n sieht man, dass $B \neq O(A)$

Definition C.54. Wir sagen

$$\begin{aligned} O(A) = O(B) &\Leftrightarrow A = O(B) \text{ und } B = O(A) \\ O(A) < O(B) &\Leftrightarrow A = O(B) \text{ und } B \neq O(A) \end{aligned}$$

Häufig verwendete Prototypen von Vergleichsfunktionen

O	Laufzeitverhalten
$O(1)$	konstant
$O(\log_a n), a > 1$	logarithmisch
$O(n)$	linear
$O(n \log_a n), a > 1$	$n \log n$
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$	polynomial
$O(a^n)$	exponentiell

Es gilt:

$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < \dots < O(n^k) < \dots < O(2^n) < O(3^n) < \dots$$

n	$\text{ld } n$	$n \text{ ld } n$	n^2	n^3	2^n
10	3.32	33.22	100	1000	1024
100	6.64	664.4	10000	10^6	$1.27 \cdot 10^{30}$
1000	9.97	9966	10^6	10^9	$\approx 10^{301}$
10000	13.29	132877	10^8	10^{12}	$\approx 10^{3010}$

Für große n sollte man daher nicht auf Fortschritte im Rechnerbau hoffen, sondern nach Algorithmen suchen, die eine bessere Ordnung besitzen.

C - 3 Unendliche Reihen

C - 3.1 Definition, Konvergenz

Definition C.55. Gegeben sei eine Folge $\{a_\nu\}$, und es sei

$$s_n := \sum_{\nu=0}^n a_\nu$$

Dann heißt die Folge $\{s_n\}_{n \geq 0}$ eine *unendliche Reihe*, in Zeichen

$$\{s_n\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

und s_n ihre n -te *Partialsomme*.

Die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $\{s_n\}$ der Partialsommen konvergiert.

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, so schreibt man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$$

Bemerkung:

1. Eine Reihe ist also nichts anderes als eine spezielle Folge, nämlich die Folge der Partialsommen.
2. Der Ausdruck $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ erlaubt zweierlei Interpretationen: erstens die Folge $\{s_n\} = \left\{ \sum_{\nu=0}^n a_\nu \right\}$ der Partialsommen, zweitens, im Fall der Konvergenz, den Wert der Reihe ($= \lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n\}$).

Beispiel C.56 (Geometrische Reihe). Sei $a_\nu = q^\nu$ für $\nu = 0, 1, \dots$; dann ist

$$s_n = \sum_{\nu=0}^n q^\nu = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

Für $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu = \frac{1}{1 - q}$$

Beispiel C.57. (a)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1.$$

(b)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = e$$

Bemerkung:

Abänderung von endlich vielen Gliedern ändert nichts am Konvergenzverhalten (da ab einer Stelle die neuen Partialsommen sich von den alten nur um eine Konstante unterscheiden), im allgemeinen aber den Wert der Reihe.

Satz C.58. Die "harmonische Reihe" $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ist divergent.

Satz C.59. 1. Sind $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$ konvergent, so sind $\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\nu})$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} (ca_{\nu})$ mit $c \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_{\nu} + b_{\nu}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (ca_{\nu}) = c \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}.$$

2. Das Monotoniekriterium (Satz C.47 (iii)) und das Cauchy-Kriterium (Satz C.47 (ii)) gelten auch für Reihen.

Bemerkung:

1. Aus dem Monotoniekriterium folgt: Sind die Glieder einer Folge $\{a_{\nu}\}$ positiv und ist die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen beschränkt, so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$; denn $\{s_n\}$ wächst streng monoton und $\lim\{s_n\}$ existiert.

Beispiel C.60. Für $\alpha > 1$ konvergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}}$.

2. Das Cauchy-Kriterium sagt aus: Äquivalent zur Konvergenz ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} \text{ gilt } |s_{n+k} - s_n| < \varepsilon,$$

das heißt

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} a_{\nu} \right| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Umgangssprachlich: Schlußstücke (Reste) konvergenter Reihen werden beliebig klein!

Bemerkung:

Speziell folgt aus dem Cauchy-Kriterium: Ist $\sum a_{\nu}$ konvergent, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt } |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon.$$

Wegen $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ folgt: $\{a_n\}$ muss gegen Null konvergieren.

Satz C.61 (Notwendige Konvergenzbedingung). Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ konvergent, so ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{a_{\nu}\} = 0$.

Bemerkung:

Gilt also $\lim\{a_{\nu}\} \neq 0$, so kann die Reihe nicht konvergieren. Die Umkehrung des Satzes ist falsch: $\sum \frac{1}{\nu}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{\nu} \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$ (vergleiche Satz C.58).

Definition C.62. Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}|$ konvergiert.

Beispiel C.63. 1. $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{\nu}$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

2. Für $|q| < 1$ ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu}$ absolut konvergent. Die Werte sind aber im allgemeinen unterschiedlich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}} = 2, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{1}{2^{\nu}} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

Satz C.64. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Bemerkung:

Die Umkehrung ist falsch, siehe Beispiel C.63(1).

C-3.2 Konvergenzkriterien

Satz C.65. 1. Es gilt das Majorantenkriterium: Ist $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$ und konvergiert

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}, \text{ so konvergiert } \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \text{ absolut.}$$

2. Es gilt das Minorantenkriterium: Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ und divergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}$, so

$$\text{divergiert } \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}.$$

Bemerkung:

Die Reihe $\sum b_{\nu}$ nennt man *konvergente Majorante* von $\sum a_{\nu}$ im Fall (a), *divergente Minorante* von $\sum a_{\nu}$ im Fall (b).

Beispiel C.66. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ ist konvergent, wegen $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ und Satz C.64.

Satz C.67 (Quotientenkriterium von d'Alambert). Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt das Quotientenkriterium:

1. $\exists q < 1 \exists n_0 (n_0 \geq n_1)$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ ist absolut konvergent.

2. $\exists n_0 (n_0 \geq n_1)$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ ist divergent.

Bemerkung:

Es genügt nicht $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$; es muß ein solches (festes) q existieren. Etwa ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n}{n+1} < 1$ für $a_n = \frac{1}{n}$, aber $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

Beispiel C.68. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $c \in \mathbb{R}$.

Satz C.69 (Quotientenkriterium in Limes-Form). Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$ und existiere ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q$. Dann gilt:

1. Ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.

2. Ist $q > 1$, so divergiert die Reihe.

Satz C.70 (Wurzelkriterium von Cauchy). Es gilt das Wurzelkriterium:

1. $\exists q < 1 \exists n_0$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ ist absolut konvergent.

2. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ divergent.

Beispiel C.71. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ konvergiert absolut.

Satz C.72 (Wurzelkriterium in Limes-Form). Wenn der Grenzwert $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q$ existiert, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$

1. absolut konvergent für $q < 1$.

2. divergent für $q > 1$.

Ist $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, so ist keine Aussage möglich.

Beispiel C.73. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ konvergiert absolut.

Definition C.74. Eine Reihe heißt *bedingt* konvergent, wenn sie konvergiert aber nicht absolut konvergiert.

Ein Kriterium für bedingte Konvergenz liefert

Satz C.75 (Leibniz-Kriterium). Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fällt $\{a_n\}$ monoton gegen Null, so konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$.

Beispiel C.76. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$)

sind konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Bemerkung:

Die Bedingung $\lim\{a_n\} = 0$ ist notwendig, vergleiche Satz C.61.

Wichtig ist auch die Monotonie von $\{a_n\}$: Zum Beispiel mit der Folge $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots$ erhält man die (unbeschränkten) Partialsummen $1, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \dots$ der harmonischen Reihe.

Umordnung, unbedingte Konvergenz

Bei endlichen Summen ist die Reihenfolge der Summanden beliebig, nicht aber bei unendlichen Reihen:

Beispiel C.77.

$$\begin{array}{rcccccccc} s = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & + \dots \\ \frac{1}{2}s = & & +\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & + \dots \\ \hline \frac{3}{2}s = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & & + \dots \end{array}$$

Dabei stehen in der Summe dieselben Summanden wie in der Ausgangsreihe. Daher könnte man erwarten, daß die Grenzwerte s und $\frac{3s}{2}$ übereinstimmen, was aber wegen $s \neq 0$ ersichtlich nicht der Fall ist.

Definition C.78. Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede Umordnung zum selben Wert konvergiert.

Satz C.79. Genau die absolut konvergenten Reihen sind unbedingt konvergent.

Beispiel C.80. Der Riemannsche Umordnungssatz besagt: Man kann bedingt konvergente Reihen zu jedem beliebigen Wert s umordnen. Wir betrachten $\sum (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu}$ und geben den Wert $s = 1.5$ vor:

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15} = 1.5\overline{3} \\ s^{(2)} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30} = 1.0\overline{3} \\ s^{(3)} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{137099}{90090} = 1.5\overline{218004} \\ s^{(4)} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} = 1.27\overline{180042}. \end{aligned}$$

C-4 Stetigkeit

C-4.1 Grenzwerte von Funktionen

Motivation:

In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn die Eingabegrößen nur gering variiert werden.

Mathematisch kann man dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisieren.

Definition C.81 (Konvergenz gegen Grenzwert). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. $f(x)$ konvergiert für $x \rightarrow \xi$ gegen den Grenzwert η , falls für jede (!) Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \eta.$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$.

Beispiel C.82. 1. $f(x) = x^2$ hat für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert.

2. Die Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$ hat in 0 (also an der Sprungstelle) keinen Grenzwert.

Satz C.83 (Grenzwertsätze für Funktionen). Wenn für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Grenzwerte im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ existieren, so gilt:

- $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \xi} g(x)}$, falls $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ für beliebige $c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow \xi} |x| = |\xi|$

C-4.2 Stetigkeit reeller Funktionen

Definition C.84 (Stetigkeit). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen, d.h. es ist:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow \xi} x) = f(\xi).$$

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten stetig ist.

Satz C.85 (ϵ - δ -Kriterium der Stetigkeit). Für eine Funktion f sind äquivalent:

- f ist stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, d.h. $f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$.
- Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta(\epsilon) > 0$, so dass: $|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$.

Bemerkung:

- Im Allgemeinen ist δ von ϵ und von ξ abhängig.
- Anschaulich bedeutet das ϵ - δ -Kriterium, daß es unter den Funktionswerten in der Nähe einer Stetigkeitsstelle keine Ausreißer gibt; eine ganze δ -Umgebung von ξ wird unter f in einen ϵ -Streifen um $f(\xi)$ abgebildet.

Hinreichend kleine Änderungen in den Argumenten einer stetigen Funktion führen also nur zu (beliebig) kleinen Änderungen der Funktionswerte.

Beispiel C.86. $f(x) = x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ sind stetig auf \mathbb{R} .

Bemerkung

1. Satz C.83 besagt, dass für in ξ stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auch die Funktionen $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(x) \neq 0$) sowie $c \cdot f(x)$ stetig in ξ sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.
2. Die Komposition stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.
3. Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ übertragbar, deren Definitionsbereich D eine echte Teilmenge von \mathbb{R} ist. In diesem Fall liegen die betrachteten Folgen $\{x_n\}$ in D .

Beispiel C.87. 1. Polynome sind auf \mathbb{R} stetig.

2. Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.
3. $\cosh x$ und $\sinh x$ sind stetig auf \mathbb{R} .

Satz C.88 (Eigenschaften stetiger Funktionen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. **Nullstellensatz:** Ist $f(a) \cdot f(b) < 0$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.
2. **Zwischenwertsatz:** Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.
3. **Stetigkeit der Umkehrfunktion:** Ist f zusätzlich streng monoton wachsend auf $[a, b]$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
4. **Maximum-Minimum-Eigenschaft:** Es existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ und $f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$.

Beispiel C.89 (Stetigkeit von Umkehrfunktionen). 1. Es sind $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ auf \mathbb{R}_0^+ und $f(x) = \ln x$ auf \mathbb{R}^+ stetig.

2. Die Arcusfunktionen \arcsin , \arccos sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

C-4.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Nach dem ϵ - δ -Kriterium C.85 sind stetige Funktionen solche, deren Funktionswert sich bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments nur beliebig wenig ändert; allerdings hängt im Allgemeinen δ von ϵ und von ξ ab. In manchen Zusammenhängen ist es aber wichtig, dass δ nur von ϵ und nicht von ξ abhängt, d.h. das man in einem ganzen Intervall zu einem ϵ dasselbe $\delta(\epsilon)$ wählen kann.

Definition C.90 (Gleichmäßige Stetigkeit). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Beispiel C.91. $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $D = (0, \infty)$, aber stetig.

Satz C.92. Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

Bemerkung:

Der Definitionsbereich im obigen Beispiel ist kein abgeschlossenes Intervall.

C-4.4 Wichtige stetige Funktionen

Beispiel C.93 (Potenzfunktionen). Potenzfunktionen besitzen die Struktur $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ definiert man $x^0 = 1$. Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig.

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m}.$$

Beispiel C.94 (Wurzelfunktionen). Schränkt man die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf \mathbb{R}_0^+ ein, so ist sie dort nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend. Nach Satz C.88 (c) existiert daher eine stetige streng monoton wachsende Umkehrfunktion: die n -te Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Mit $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$, $x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$ sowie $x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Potenzfunktionen.

Beispiel C.95 (Exponentialfunktion). Sei $a > 0$. Dann bezeichnet man mit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x$$

die Exponentialfunktion zur Basis a . Exponentialfunktionen sind stetig.

Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion bei der die Eulersche Zahl e als Basis dient. Man bezeichnet sie als

$$\exp(x) := e^x.$$

Beispiel C.96 (Logarithmusfunktion). Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ ist stetig, streng monoton wachsend und bildet \mathbb{R} bijektiv auf \mathbb{R}^+ ab. Ihre Umkehrfunktion

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet man als Logarithmusfunktion zur Basis a .

Für $a = e$ ergibt sich der natürliche Logarithmus \ln .

Es gelten die Rechenregeln:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^p) = p \log_a x.$$

Beispiel C.97 (Trigonometrische Funktionen). Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel φ mit $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ bezeichnet.

Hierdurch wird die Sinusfunktion $\sin \varphi$ und die Cosinusfunktion $\cos \varphi$ definiert. Dabei misst man den Winkel φ im Bogenmaß: die Länge des entsprechenden Kreissegments im Einheitskreis.

Der Umfang des Einheitskreises beträgt $2 \cdot \pi$, wobei π die Kreiszahl $\pi \approx 3,14159 \dots$ ist.

Es gilt:

1. $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$
2. $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$
3. $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$
4. $\sin(\varphi + 2\pi k) = \sin \varphi$, $\cos(\varphi + 2\pi k) = \cos \varphi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ (2π -Periodizität)
5. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Beispiel C.98 (Trigonometrische Funktionen (Forts.)). Die Tangensfunktion \tan ist definiert als $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$.

Die Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ und es gilt π -Periodizität: $\tan(\varphi + k\pi) = \tan \varphi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel C.99 (Trigonometrische Umkehrfunktionen). Wenn wir die trigonometrischen Funktionen auf ein Intervall einschränken auf dem sie streng monoton sind, so können wir dort Umkehrfunktionen definieren.

1. \cos ist in $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ heißt Arcus-Cosinus.
2. \sin ist in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt Arcus-Sinus.
3. \tan ist in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend mit Wertebereich \mathbb{R} . Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt Arcus-Tangens.

C - 5 Differenzierbarkeit

Motivation:

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, stellt sich die Frage: "Wie schnell" ändert sich die abhängige Größe?
Wenn die Funktion z.B. den Ort eines Punktes in Abhängigkeit von der Zeit bei einer Bewegung entlang einer Linie beschreibt, so ist dies die Frage nach der Geschwindigkeit (zu jedem Zeitpunkt).
- Betrachtet man eine Funktion nur in unmittelbarer Nähe einer Stelle, dann möchte man sie dort durch eine einfachere Funktion möglichst gut annähern.

Diese und ähnliche Fragen beantwortet die Ableitung bzw. Differentiation.

Definition C.100. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$. f heißt in ξ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert und endlich ist.

Der Grenzwert heißt dann die *Ableitung bzw. Differentialquotient* von $f(x)$ in ξ und wird mit $f'(\xi)$ oder $\frac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

Ist f in allen $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

Den Übergang von f zu f' nennt man *Differenzieren* oder *Ableiten*.

Bemerkung:

1. $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \frac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt *Differenzenquotient*. Dieser gibt die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ des Graphen von f an.

Für $x \rightarrow \xi$ (also $\Delta x \rightarrow 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung in $(\xi, f(\xi))$ über.

2. Die Gleichung der Tangente t an f in $(\xi, f(\xi))$ ist:

$$t(x) = f(\xi) + f'(\xi) \cdot (x - \xi).$$

3. Wie bei der Stetigkeit übertrage sich die Begriffe sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneq \mathbb{R}$.

Beispiele C.101. 1. $f(x) = ax + b$ (Gerade mit Steigung a).

Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{(a(\xi + h) + b) - (a\xi + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Daraus folgt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = a$; es ist also $f'(x) = a \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{x^n - \xi^n}{x - \xi} = x^{n-1} + \xi x^{n-2} + \dots + \xi^{n-1}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \xi^{n-1} + \xi^{n-1} + \dots + \xi^{n-1} = n \cdot \xi^{n-1}.$$

Also ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \forall x \in \mathbb{R}$.

Ableitungen elementarer Funktionen

1. $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
2. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
3. $f(x) = \ln x$ mit $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
5. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
6. $f(x) = \tan x$ mit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Definition C.102. Die Funktion f heißt in $\xi \in D$ linear approximierbar, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\delta : U_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$f(\xi + \Delta x) = f(\xi) + c\Delta x + \delta(\Delta x) \text{ mit } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad (\text{C.1})$$

(m.a.W. $\delta(\Delta x) = o(\Delta x)$) gilt.

Satz C.103. f ist in ξ differenzierbar $\iff f$ ist in ξ linear approximierbar.

Satz C.104. Ist f in ξ differenzierbar, so ist f in ξ stetig.

Bemerkung:

Die Umkehrung ist falsch; vergleiche $f(x) = |x|$.

Differenzierbarkeit ist also mehr als Stetigkeit. Der Graph ist nicht nur in einem Zug zu zeichnen, er besitzt auch keine Ecken.

Satz C.105 (Ableitungsregeln). f, g seien in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- a) $f \pm g$ ist in ξ differenzierbar mit $(f \pm g)'(\xi) = f'(\xi) \pm g'(\xi)$;
- b) $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, ist in ξ differenzierbar mit $(c \cdot f)'(\xi) = c \cdot f'(\xi)$;
- c) $f \cdot g$ ist in ξ differenzierbar mit (Produktregel)

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi).$$

- d) Ist $g(\xi) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ ist in ξ differenzierbar mit (Quotientenregel)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

[Kurzfassung von (c) und (d): $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.]

Satz C.106 (Kettenregel). Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ und $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(\xi) \in f(D)$ differenzierbar, so ist $h := g \circ f$ in ξ differenzierbar, und es gilt

$$h'(\xi) = (g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi).$$

Bemerkung:

Für $h = g \circ f$ heißt g die äußere, f die innere Funktion.

h' = Ableitung der äußeren Funktion an der inneren Stelle mal Ableitung der inneren Funktion.

Kurzfassung: $h' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Satz C.107 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow f(I)$ eine umkehrbare stetige Funktion mit der Umkehrfunktion $\varphi := f^{-1} : f(I) \rightarrow I$. Ist f in $\xi \in I$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$, so ist φ in $\eta = f(\xi) \in f(I)$ differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(\eta) = \frac{1}{f'(\varphi(\eta))}.$$

Kurzform: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

C-5.1 Sätze über differenzierbare Funktionen

Satz C.108 (Satz von Rolle). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz C.109 (Mittelwertsatz, Lagrange). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bemerkung:

Anschaulich heißt dies: In mindestens einem Punkt ξ ist die Tangente parallel zur Sekante von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$.

Im Weg-Zeit-Diagramm: Zu mindestens einem Zeitpunkt erreicht man genau die Durchschnittsgeschwindigkeit (Differenzierbarkeit vorausgesetzt).

Satz C.110 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz, Cauchy). Es seien f, g auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Satz C.111 (Regel von de l'Hospital). 1. Es seien f, g auf (a, b) stetig differenzierbar mit $\xi \in (a, b)$, $f(\xi) = g(\xi) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

2. Es seien f, g stetig differenzierbar auf $(a, b) \setminus \xi$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq \xi$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

Beispiel C.112. 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$.

3. Das Verfahren funktioniert natürlich nur bei „unbestimmten Ausdrücken“ wie $\frac{0}{0}$:

Zum Beispiel ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x} = 0$, aber $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$.

Bemerkung:

Häufig ist vor der Anwendung der Regel von de l'Hospital eine Umformung erforderlich:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ bzw. } f(x) - g(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right).$$

Beispiel C.113.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} \cdot (-x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-2) \cdot (-x^2)}{x^2 - 1} = 2 \end{aligned}$$

C-5.2 Höhere Ableitungen

Definition C.114. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, das heißt es existiert die Funktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Ist f' auf I stetig, so nennt man f *stetig differenzierbar*.
- Ist f' auf I differenzierbar, so nennt man f *zweimal differenzierbar* und $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f auf I .
- Entsprechend erklärt man n -malige Differenzierbarkeit und n -malige stetige Differenzierbarkeit für $n \in \mathbb{N}$.

Man schreibt $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, \dots , $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Beispiel C.115. 1. Für $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$ für alle n . Es ist f beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} .

2. Für $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 4$. Also ist f beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R} .

3. Für $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \dots$. Daher ist f beliebig oft differenzierbar auf \mathbb{R}^+ .

C-5.3 Geometrische Bedeutung der Ableitung

Motivation:

Die Kenntnis von Ableitungen ermöglicht verschiedene Aussagen über den Graphen einer Funktion, so zu Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten und Wendepunkten.

Satz C.116 (Monotonie differenzierbarer Funktionen). Für eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion f gilt

1. $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in I \iff f$ ist monoton wachsend (fallend);
2. $f'(x) = 0 \forall x \in I \iff f$ ist auf I konstant;
3. $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in I \implies f$ ist streng monoton wachsend (fallend).

Bemerkung:

Ist f streng monoton wachsend, so folgt nicht notwendig $f'(x) > 0$ (vergleiche $f(x) = x^3$).

Definition C.117. Eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein *globales (absolutes) Maximum*, wenn $f(x) \leq f(a) \forall x \in D$ gilt.

a heißt dann *globale Maximalstelle*, $f(a)$ *globales Maximum* von f .

$b \in D$ heißt *lokale Maximalstelle*, ($f(b)$ *lokales Maximum*), falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(b) \geq f(x) \forall x \in (b - \delta, b + \delta)$.

Analog erklärt man *Minimalstellen*, *Minimum*. Maxima und Minima heißen auch *Extrema* (entspr. *Extremstellen*).

Satz C.118 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema, Fermat). Ist f auf dem offenen Intervall I differenzierbar und hat in $\xi \in I$ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.
(Eine Stelle ξ mit $f'(\xi) = 0$ heißt auch *stationärer Punkt*).

Bemerkung:

1. Ist f differenzierbar und ξ Extremstelle von f , so ist die Tangente an f in ξ waagrecht.
2. $f(x) = |x|$ hat in $\xi = 0$ ein globales Minimum, es ist aber keine Tangente erklärt.

- Die Umkehrung von Satz C.118 ist falsch: $\xi = 0$ ist stationärer Punkt von $f(x) = x^3$ [$f'(0) = 0$], aber keine Extremstelle.
- Extremstellen können außer in stationären Punkten auch am Rand des Intervalls liegen oder Stellen sein, in denen f nicht differenzierbar ist.

Satz C.119 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema). Sei I offenes Intervall, $\xi \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar ($n \geq 2$).

Weiterhin gelte $f'(\xi) = f''(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

- Wenn n gerade ist, so liegt in ξ ein lokales Extremum vor.
 - Ist $f^{(n)}(\xi) > 0$, so ist es ein lokales Minimum.
 - Ist $f^{(n)}(\xi) < 0$, so ist es ein lokales Maximum.
- Für ungerades n liegt kein Extremum vor.

Beispiel C.120. 1. Für $f(x) = x^3$ gilt: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, also $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6 \neq 0$; d.h. im Punkt 0 liegt kein Extremum vor.

2. Für $f(x) = x^4$ gilt: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f^{(4)} = 24$, also $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) > 0$; d.h. im Punkt 0 liegt ein lokales Minimum vor.

Definition C.121 (Konvexität, Konkavität). Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- konvex in I , wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

- konkav in I , wenn für alle $a, b \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Gelten strenge Ungleichungen, so heißt f in I streng konvex bzw. konkav.

Bemerkung:

Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und weisen eine Linkskrümmung auf; konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und weisen eine Rechtskrümmung auf.

Satz C.122. Sei f stetig differenzierbar in I . Dann gilt:

- f ist in I konvex $\iff f'$ ist monoton wachsend auf I
- f ist in I konkav $\iff f'$ ist monoton fallend auf I

Satz C.123. Sei f zweimal stetig differenzierbar in I . Dann gilt:

- f ist in I konvex $\iff f'' \geq 0$ auf I .
 - $f'' > 0$ auf I $\implies f$ ist streng konvex in I .
- f ist in I konkav $\iff f'' \leq 0$ auf I
 - $f'' < 0$ auf I $\implies f$ ist streng konkav in I .

Bemerkung:

Das Vorzeichen von f'' gibt also Auskünfte über das Krümmungsverhalten des Graphen von $y = f(x)$:

- Ist $f'' > 0$, so ist f' monoton wachsend; also wird f steiler oder wechselt von Fallen zum Steigen. Es liegt also eine Linkskrümmung vor.
- Ist $f'' < 0$, so liegt eine Rechtskrümmung vor.

Beispiel C.124. 1. Typische konvexe Funktionen sind $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$.

2. Die Funktion $h(x) = \ln(x)$ ist konkav.

Definition C.125 (Wendepunkt). Eine in ξ differenzierbare Funktion $f(x)$ hat einen *Wendepunkt* in ξ , falls $f'(x)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

Bemerkung:

In einem Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten:

- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton wachsend und rechts von ξ monoton fallend; wir haben einen Konvex-konkav-Wechsel.
- Hat $f'(x)$ in ξ ein lokales Minimum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ monoton fallend und rechts von ξ monoton wachsend; wir haben einen Konkav-konvex-Wechsel.

Satz C.126. *Ist f auf I konvex (konkav) so ist jedes seiner lokalen Minima (Maxima) auch globales Minimum (Maximum). Ist f sogar streng konvex oder konkav so gibt es nur einen einzigen Minimalpunkt bzw. Minimalwert.*

Bemerkung:

Satz C.126 gilt auch in der Ebene \mathbb{R}^2 und ganz allgemeinen Räumen beliebiger Dimension. Er ist von grundlegender Bedeutung in der Optimierung.

C - 5.4 Der Satz von Taylor

Motivation:

Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ stellt die Tangente

$$t(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi)$$

eine lokale Approximation der Funktion im Punkt ξ durch ein Polynom 1. Grades dar.

Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist $f(x)$ durch Polynome höheren Grades (besser) zu approximieren, wenn f eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt.

Satz C.127 (Taylorsche Formel). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi, x \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann besitzt f die folgende Taylorentwicklung um ξ :*

$$f(x) = T_n(x, \xi) + R_n(x, \xi)$$

mit dem Taylorpolynom n -ten Grades

$$T_n(x, \xi) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - \xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_n(x, \xi) = \frac{(x - \xi)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi + \vartheta(x - \xi)).$$

Dabei ist ϑ eine von f, n, x, ξ abhängige Zahl mit $0 < \vartheta < 1$ und $\xi + \vartheta(x - \xi)$ eine Stelle zwischen x und ξ .

Bemerkung:

1. Für $n = 0$ liefert die Taylorsche Formel den Mittelwertsatz C.109.
2. Man kann zeigen, dass $T_n(x, \xi)$ das einzige Polynom vom Grad $\leq n$ ist, das die Approximationsgüte $O((x - \xi)^{n+1}) = o((x - \xi)^n)$ besitzt.

3. Neben der Restglieddarstellung von Lagrange gibt es weitere Darstellungen des Restgliedes; z.B. die Darstellung nach Cauchy

$$R_n(x, \xi) = \frac{(1 - \vartheta)^n (x - \xi)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi + \vartheta(x - \xi)).$$

Satz C.128. Jede auf einem offenen Intervall I $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion f mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$ ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beispiel C.129. 1. Sei $f(x) = e^x$, $\xi = 0$; dann ist $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das n -te Taylorpolynom von f in ξ ist

$$T_n(x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Für das Restglied

$$R_n(x, 0) = e^{\vartheta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < \vartheta < 1)$$

gilt für $|x| < c$

$$|R_n| \leq e^c \frac{|c|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2. Sei $f(x) = p(x)$ (Polynom vom Grad $\leq n$). Dann folgt $R_n(x, 0) = 0$ für alle x , also ist $T_n(x, 0) = p(x)$ für alle x .

C-5.5 Potenzreihen

Definition C.130. Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge. Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißen *Potenzreihen*, x_0 ihr *Entwicklungspunkt* und a_n ihre *Koeffizienten*.

Bemerkung:

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = x_0$ mit dem Wert a_0 .

Beispiel C.131. 1. Die Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

hat den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Sie konvergiert (geometrische Reihe!) für $|1-x| < 1$, also für $0 < x < 2$ mit dem Wert $\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$.

Satz C.132. Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ existiert eine Zahl $r \geq 0$ oder $r = \infty$, so daß die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$ absolut konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$ divergiert. Dabei heißt $r = 0$, daß sie nur für $x = x_0$ konvergiert, $r = \infty$ heißt, daß sie für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Mann nennt r den *Konvergenzradius* der Potenzreihe, das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ heißt *Konvergenzintervall* (für $r \neq \infty$).

Für den Konvergenzradius gilt die Cauchy-Hadamardsche Formel

$$r = \frac{1}{\lim(\sqrt[n]{|a_n|})},$$

wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ gesetzt wird.

Bemerkung:

Über die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls, also für $|x - x_0| = r$, ist keine allgemeine Aussage möglich.

C - 5.6 Taylorreihen

Definition C.133. Ist f auf D beliebig oft differenzierbar, so läßt sich die *Taylorreihe*

$$T_f(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

von f bezüglich ξ hinschreiben.

Bemerkung:

1. Die Taylorreihe muß weder konvergieren noch (im Fall der Konvergenz) die Summe $f(x)$ haben.
2. Nach dem Satz über die Taylorsche Formel C.127 konvergiert $T_f(x, \xi)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, \xi) = 0$ ist.

Beispiel C.134. 1. Für $f(x) = e^x$, $\xi = 0$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Für beliebiges ξ gilt

$$e^x = e^\xi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^k}{k!} \quad (\text{Funktionalgleichung!}).$$

2. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und $\xi = 0$. Es ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n und $T_f^n(x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - \xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) = 0$ für alle n , also $R_{n+1}(x, 0) = f(x) \not\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, läßt sich aber nicht als eine Potenzreihe darstellen.

Bemerkung:

1. Eine konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \xi)^k, \quad |x - \xi| < r$$

ist bereits die Taylorreihe von f bezüglich ξ .

2. Um eine Funktion als Reihe darzustellen, müssen nicht immer die Ableitungen berechnet werden; man kann auch bekannte Reihen umformen, um die Taylorreihe zu erhalten.

Definition C.135. Eine Funktion $f(x)$ heißt am Punkt ξ *reell analytisch* falls sie dort unendlich oft differenzierbar ist und ihre Taylorreihe $T(x, \xi)$ für alle x aus einer Umgebung von ξ gegen $f(x)$ konvergiert.

Bemerkung:

1. Für jedes ξ bildet die Menge dieser Funktionen einen Ring, d.h. Summen, Differenzen und Produkte haben diesselbe Eigenschaft.
2. Die Verkettung (Verknüpfung) von zwei analytischen Funktionen ist wieder eine analytische Funktion.

C - 6 Fixpunkt-Iteration

Motivation:

Iterationsverfahren sind Verfahren der schrittweisen Annäherung. Sie gehören zu den wichtigsten Methoden in der Numerik zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen, z.B. Bisektionsverfahren. Verfahren zur iterativen Lösung einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, haben meistens die Form

$$x_{k+1} = \phi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \text{ (FPI).}$$

und heißen Fixpunkt-Iterationen mit Verfahrensfunktion ϕ .

Die Bezeichnung Fixpunkt-Iteration ist wie folgt begründet:

Erzeugt die Iterationsvorschrift (FPI) eine konvergente Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und ist ϕ stetig, so folgt:

$$x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \phi(x^*).$$

Das Verfahren konvergiert also und der Grenzwert x^* hat die Eigenschaft $x^* = \phi(x^*)$ und ist damit ein Fixpunkt der Verfahrensfunktion ϕ .

Wie gewinnt man die Verfahrensfunktion ϕ ?

Man formt die Gleichung $f(x) = 0$ in eine äquivalente Gleichung der Form $x = \phi(x)$ um. Dies kann auf vielfältige Art geschehen und hat großen Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Fixpunkt-Iteration.

Definition C.136. Eine Abbildung $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* auf D , falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass:

$$\forall x, y \in D : |\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

L heißt *Lipschitz-Konstante*.

Kann man $L < 1$ wählen, so heißt die Abbildung ϕ kontrahierend und L nennt man dann auch Kontraktionskonstante von ϕ .

Bemerkung:

1. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig auf D .
2. Man beachte, dass die Kontraktionseigenschaft nur durch eine Abschätzung $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|$ mit $L < 1$ gesichert ist.

Satz C.137. Falls eine Funktion ϕ stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist, so besitzt sie die Lipschitz-Konstante

$$L = \sup\{|\phi'(\xi)| : a \leq \xi \leq b\}.$$

Beweis:

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$|\phi(y) - \phi(x)| = |\phi'(\xi)(y - x)| = |\phi'(\xi)| |y - x| \leq L |y - x|$$

mit $\xi \in (a, b)$.

Satz C.138 (Banachscher Fixpunktsatz). Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\phi : D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung von D in sich (d.h. $\phi(D) \subseteq D$) mit Kontraktionskonstante $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von ϕ in D .
2. Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^* .

3. Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

(Die linke Ungleichung heißt a posteriori und die rechte – a priori Abschätzungen)

Bemerkung:

- Die Bedingungen des Satzes C.138 sind hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes, sowie für die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration.
- Die Bedingung $L < 1$ des Satzes C.138 ist wesentlich. Denn die Funktion

$$\phi(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}, \quad \text{für } D = \{x \geq 0\}$$

ist zwar schwachkontrahierend ($|\phi(x) - \phi(y)| < |x - y|$), es existiert hier aber kein Fixpunkt.

C - 6.1 Newton-Verfahren

Motivation:

Das Konvergenzverhalten von Fixpunkt-Iterationen zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen hängt entscheidend von der Wahl der Verfahrungsfunktion ϕ ab.

Eine geschickte Wahl von ϕ führt auf das Newton-Verfahren. Dieses beruht auf einer Taylorapproximation 1. Ordnung (Linearisierung) und konvergiert schnell, falls es konvergiert.

Verfahren:

Wir suchen eine Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

Das Newton-Verfahren besteht darin, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und dessen Nullstelle als neue Näherung x_1 zu benutzen. Dieses Vorgehen wird iteriert.

Die Tangente an f im Punkt x_0 ist das Taylorpolynom 1-ter Ordnung

$$T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Der Schnittpunkt mit der x -Achse ist in x_1 mit $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$, also in

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Als allgemeine Iterationsvorschrift haben wir dann:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Beispiel C.139. Wir wollen die Nullstelle von $f(x) = x + e^x$ bestimmen und wählen den Startwert $x_0 = 0$ (es ist $f'(x) = 1 + e^x$):

ν	x_ν	$f(x_\nu)$	$f'(x_\nu)$
0	0	1	2
1	-0.5	0.1065306	1.6065307
2	-0.5663110	0.0013045	1.5676155
3	-0.5671432	0.0000002	1.5671434
4	-0.5671433	0.000000028	

Also hat $f(x) = x + e^x$ eine Nullstelle bei $x_4 = -0.5671433$. Man beachte die Genauigkeit $f(x_4) = 0.000000028$.

Bemerkung:

Das Verfahren konvergiert nicht immer, im allgemeinen konvergiert es erst, wenn der Startwert x_0 "hinreichend nahe" bei der Nullstelle liegt (lokale Konvergenz).

Einen wichtigen Fall, in dem Konvergenz auftritt, enthält der folgende Satz:

Satz C.140 (Konvergenz des Newton-Verfahrens). *Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:*

1. Die Funktion f hat genau eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$.
2. Ist $x_0 \in [a, b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N},$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ .

3. Ist $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in (\xi, b)$, so hat man für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Bemerkung:

1. Analoge Aussagen gelten auch, falls f konkav ist oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt.
2. Die Fehlerabschätzung unter (3) besagt, dass beim Newton-Verfahren quadratische Konvergenz vorliegt. Ist etwa $\frac{K}{2C} \approx 1$ und stimmen x_{n-1} und x_n auf k Dezimalen überein, so ist die Näherung x_{n+1} auf $2k$ Dezimalen genau und bei jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der gültigen Stellen.

C - 6.2 Implizites Differenzieren

Motivation:

Bisweilen sind Funktionen implizit gegeben, z.B. kann eine Funktion:

$$y : (-1, 1) \rightarrow (0, 2) \text{ mit } x \mapsto y(x)$$

durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ implizit gegeben sein.

Dies ist dann zu interpretieren als:

»Ist $x \in (-1, 1)$, so ist $y(x) \in (0, 2)$ jene eindeutig existierende Zahl, für die $x^2 + y(x)^2 = 1$ gilt.«

Explizit ausgedrückt ist das:

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ für } x \in (-1, 1).$$

Diese explizite Beziehung ist aber manchmal nur schwierig oder gar nicht aus der impliziten Schreibweise herleitbar oder schwierig zu differenzieren, o.ä.

In einem solchen Fall ist der folgende Satz hilfreich:

Satz C.141 (Implizites Differenzieren). *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene beschränkte Intervalle und $y : I \rightarrow J$ eine differenzierbare Funktion. Wenn $h : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, so dass:*

1. h stetig ist;
2. $h(x, y(x)) = 0$ für alle $x \in I$;
3. die partiellen Ableitungen von h nach x und y (bezeichnet mit h_x bzw. h_y) existieren ¹;

und außerdem $x_0 \in I$, so dass $h_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$, dann gilt für die Ableitung von y an der Stelle x_0 die Beziehung:

$$y'(x_0) = -\frac{h_x(x_0, y(x_0))}{h_y(x_0, y(x_0))}.$$

¹Eine partielle Ableitung einer Funktion in zwei Variablen x und y nach x erhält man, indem man y als Konstante betrachtet und wie gewohnt ableitet. (Analog für die partielle Ableitung nach y .)

C - 7 Integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

C - 7.1 Das bestimmte Integral

Motivation:

Eine weitere zentrale Frage der Analysis ist die nach dem Inhalt der Fläche, die zwischen der x -Achse, dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (abgeschlossenes, beschränktes Intervall) und den vertikalen Begrenzungsgeraden $x = a$ und $x = b$ liegt.

Definition C.142. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

1. Unter einer *Zerlegung* \mathcal{Z} von $[a, b]$ versteht man eine geordnete Menge von endlich vielen Punkten x_0, x_1, \dots, x_n mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
2. Man nennt $\eta(\mathcal{Z}) := \max\{x_\nu - x_{\nu-1} : 1 \leq \nu \leq n\}$ die *Spanne* (beziehungsweise *Feinheit*) von \mathcal{Z} .
3. Eine Zerlegung \mathcal{Z}_1 ist eine feinere Zerlegung als (bzw. Verfeinerung von) \mathcal{Z}_2 ($\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1$), falls \mathcal{Z}_1 durch Hinzunahme weiterer Knoten zu \mathcal{Z}_2 entsteht.

Definition C.143 (Riemann-Summe). 1. Summen der Form

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \text{ mit } \xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

heißen *Riemann-Summen* einer Funktion f zur Zerlegung \mathcal{Z} .

2.

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n \left(\inf_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \right) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Untersumme* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} .

3.

$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n \left(\sup_{\xi \in [x_{\nu-1}, x_\nu]} f(\xi) \right) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

heißt *Obersumme* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} .

Bemerkung:

1. Für fixierte Zerlegungen \mathcal{Z} ist $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$.
2. Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen: $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1 \implies U_f(\mathcal{Z}_1) \geq U_f(\mathcal{Z}_2)$ und $O_f(\mathcal{Z}_1) \leq O_f(\mathcal{Z}_2)$.
3. Für beliebige Zerlegungen \mathcal{Z} und \mathcal{Z}' eines Intervalls ist stets $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$; insbesondere ist die Menge der Obersummen (Untersummen) nach unten (oben) beschränkt.

Definition C.144 (Riemann-Integral). • Wegen der letzten Eigenschaft existieren die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]} U_f(\mathcal{Z}) \quad \text{Riemannsches Unterintegral}$$
$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]} O_f(\mathcal{Z}) \quad \text{Riemannsches Oberintegral}$$

- $f(x)$ heißt (*Riemann-*)*integrierbar* über $[a, b]$, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen.

Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

das Riemann-Integral von $f(x)$ über $[a, b]$.

Beispiel C.145. 1. Sei $f(x) = c = \text{const}$ auf $[a, b]$. Dann ist

$$U_f(\mathcal{Z}) = O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{\nu=1}^n c(x_\nu - x_{\nu-1}) = c(b-a)$$

für jede Zerlegung \mathcal{Z} , d.h.

$$\int_a^b f(x) dx = c(b-a).$$

2. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{Dirichletsche Sprungfunktion.}$$

Für jede Zerlegung \mathcal{Z} ist $U_f(\mathcal{Z}) = 0$ und $O_f(\mathcal{Z}) = 1$.

Somit ist $f(x)$ nicht Riemann-integrierbar.

Definition C.146 (Flächenberechnung). Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative, Riemann-integrierbare Funktion, so wird die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx$$

als *Fläche* zwischen der Kurve $f(x)$ und der x -Achse zwischen den Geraden $x = a$ und $x = b$ bezeichnet.

Bemerkung:

1. Ist f negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)| dx$ definieren.
2. Ist $b < a$, so definiert man $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

Satz C.147 (Monotonie des Riemann-Integrals). Sind f und g auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Bemerkung:

Als Folgerungen aus der Monotonie erhalten wir:

1. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$,
2. Wenn $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, dann ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Satz C.148 (Rechenregeln für das Riemann-Integral). Es seien f, g Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

1. $f + g$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. αf ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$\int_a^b (\alpha f)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

3. Gilt $a \leq c \leq b$, so ist f Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$, und es ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Satz C.149 (Riemannsches Kriterium). Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist integrierbar über $[a, b]$.
2. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ derart, dass gilt:

$$O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \leq \epsilon.$$

Satz C.150 (Integrierbarkeit monotoner Funktionen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f auf $[a, b]$ monoton ist, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Satz C.151 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f auf $[a, b]$ stetig ist, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Satz C.152. Sei f integrierbar auf $[a, b]$, $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ und $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Verkettung $h \circ f$ integrierbar auf $[a, b]$.

Bemerkung:

Der Beweis ist kompliziert. Es genügt nicht, daß h integrierbar auf $[c, d]$ ist. Wir betrachten etwa die auf $[0, 1]$ integrierbaren Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0, 1], \frac{p}{q} \text{ gekürzt.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Aber die Verkettung ist nicht Riemann-integrierbar

$$(h \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

Aus Satz C.152 folgt

Satz C.153. Es seien f, g integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist

$$f \cdot g \text{ integrierbar auf } [a, b].$$

Satz C.154 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Mit $g \equiv 1$ folgt

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi) \quad \text{mit } a \leq \xi \leq b.$$

C-7.2 Das unbestimmte Integral und die Stammfunktion

Definition C.155. Man nennt eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion F eine *Stammfunktion* von f , wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Bemerkung:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstante C eine Stammfunktion von $f(x)$.

Satz C.156. Sind F und G Stammfunktionen von f , so ist $F(x) = G(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) für alle $x \in I$.

Satz C.157. Sei f integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

stetig auf $[a, b]$.

Ist f zusätzlich in $x_0 \in [a, b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar mit

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist F Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

Satz C.158 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei f integrierbar auf $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b.$$

Bemerkung:

Integrierbarkeit erweist sich in gewisser Weise als Umkehrung der Differentiation:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \implies \left(\int f \right)' = f$$

und

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar, } F' \in R([a, b]) \implies \int F' = F.$$

Definition C.159 (Unbestimmtes Integral). Eine Stammfunktion F von f wird auch als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet und man schreibt

$$F = \int f \quad \text{oder} \quad F(x) = \int f(x) dx.$$

Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante bestimmt! (Vergleiche Satz C.156.)

Bemerkung:

Nicht jede integrierbare Funktion besitzt eine Stammfunktion und die Existenz einer Stammfunktion F von f sichert nicht die Integrierbarkeit von f .

Unbekannte Integrale berechnet man durch (z.T. trickreiche) Umformungen in bekannte Integrale. Hierzu gibt es zwei Grundtechniken:

Satz C.160 (Substitutionsregel). Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow D$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

Satz C.161 (Partielle Integration). Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

Bemerkung zur Substitutionsregel:

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, diesen Satz anzuwenden:

- 1.) Der Integrand ist von der Form $f(g(t)) g'(t)$ oder läßt sich auf diese Form bringen. Zum Beispiel ist

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -f(g(t)) g'(t)$$

mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(t) = \cos t$, $g'(t) = -\sin t$.

2.) Zur Berechnung von $\int f(x) dx$ substituieren wir $x = g(t)$ mit einer geeigneten, umkehrbaren Funktion $g(t)$; dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, $dx = g'(t) dt$ und es entsteht das Integral

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = H(t) + c,$$

wobei H eine Stammfunktion von $h := f \circ g$ ist.

Bemerkung zur Substitutionsregel (Forts.):

Rücksubstitution $t = g^{-1}(x)$ liefert

$$\int f(x) dx = H(g^{-1}(x)) + c.$$

Beispielsweise zur Berechnung von $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ für $0 < a < 1$ substituieren wir $x := g(t) = \sin t$ (dann ist $t = \arcsin x = g^{-1}(x)$), $dx = \cos t dt$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^a f(x) dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(a)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \\ &= \int_0^{\arcsin a} \frac{1}{|\cos t|} \cos t dt \end{aligned}$$

(wegen $0 \leq x < a < 1$ ist $0 \leq t = \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, also $\cos t \geq 0$ und somit)

$$= \int_0^{\arcsin a} 1 dt = \arcsin a.$$

C - 7.3 Uneigentliche Integrale

Motivation:

Es treten häufig Integrale auf, bei denen

- der Integrand nicht beschränkt ist.

Beispiel: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

- das Integrationsintervall kein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

Beispiel: $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$

Solche Integrale werden *uneigentlich* genannt.

Definition C.162 (Uneigentliche Integrationsgrenzen). Es sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar. Man setzt

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

Man nennt dann das Integral *konvergent* und f auf $[a, \infty)$ *uneigentlich integrierbar*.

Analog erklärt man Integrale $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ für $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Schließlich setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \text{ für } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definition C.163 (Konvergenz). Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a + \epsilon, b]$ mit $0 < \epsilon < b - a$ integrierbar und in a nicht definiert.

Falls $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ existiert, heißt $\int_a^b f(x) dx$ konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Eine analoge Definition gilt, falls $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in b nicht definiert, aber auf inneren Approximationen integrierbar ist:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

Schließlich setzt man

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{für } f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Interpolation von $n!$

Definition C.164. Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist erklärt durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Satz C.165. 1. Es gilt die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

2. $\Gamma(1) = 1$.

3. $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

C-7.4 Anwendungen der Integralrechnung

Bogenlänge

Satz C.166. Der Graph $y = f(x)$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Länge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Beispiel C.167. Kreisbogen $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$\text{Es gilt } y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und somit} \quad (y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Damit gilt für den Kreisbogen

$$\ell = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a.$$

Definition C.168. Eine ebene Kurve (Kurve in \mathbb{R}^2) wird beschrieben durch zwei stetige (differenzierbare) Funktionen $x(t)$, $y(t)$ ($a \leq t \leq b$). Der Punkt

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b$$

verändert sich stetig mit t (Zeit) und durchläuft eine Kurve. Man nennt das System der beiden Gleichungen

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

eine *Parameterdarstellung* der Kurve, t den *Parameter* und $[a, b]$ das *Parameterintervall*. Die Kurve wird mit wachsendem t in positiver Richtung durchlaufen.

Beispiel C.169. 1. Die Parameterdarstellung $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ beschreibt einen Kreis mit Radius r .

2. Die Parameterdarstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ beschreibt eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Satz C.170. Die Länge eines Kurvenbogens mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $a \leq t \leq b$ beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Beispiel C.171. Für den Kreisumfang gilt

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Bemerkung:

Man kann eine Kurve auch beschreiben durch einen Zeiger, der um den Nullpunkt gedreht wird und dessen Länge r sich mit dem Winkel φ verändert:

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$$

heißt dann die *Polardarstellung* der Kurve. Für die Länge erhält man

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Beispiel C.172. 1. Für den Kreis (konstanter Radius) gilt $r(\varphi) = r$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und damit

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} d\varphi = 2\pi r.$$

2. Es ist $r(\varphi) = a\varphi$ für $a > 0$ und $0 \leq \varphi \leq \infty$ die Polardarstellung einer Spirale. Nach einem Umlauf ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) beträgt die Länge

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left(\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} \Big|_0^{2\pi} + \operatorname{arsinh} \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{a}{2} (2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \operatorname{arsinh} 2\pi) \end{aligned}$$

Sektorflächen

Wir wollen den Flächeninhalt berechnen, den ein Fahrstrahl von 0 nach $c(t)$ für eine Funktion $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht.

Dazu approximieren wir die Fläche durch Dreiecksflächen:

Sei $\mathcal{Z} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.

Die Fläche des durch die Eckpunkte $0, c(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, c(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ festgelegten Dreiecks beträgt

$$\frac{1}{2} |x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i|,$$

womit die Gesamtfläche aller durch die Zerlegung entstandenen Dreiecke

$$A(\mathcal{Z}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

ist (geeignete Orientierung vorausgesetzt, damit die Beträge entfallen können).

Definition C.173 (Orientierter Flächeninhalt). Der Fahrstrahl an der Kurve $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht den orientierten Flächeninhalt $F(c)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ mit $\eta(\mathcal{Z}) \leq \delta$ gilt:

$$|A(\mathcal{Z}) - F(c)| \leq \epsilon.$$

Satz C.174 (Sektorformel von Leibnitz). Sei $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann überstreicht der Ortsvektor $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ im Zeitintervall $[a, b]$ die Fläche

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y) dt.$$

Beispiel C.175. Der Fahrstrahl an den orientierten Kreisbogen

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \quad t \in [0, \varphi] \end{aligned}$$

überstreicht die orientierte Fläche

$$\frac{1}{2} \int_0^\varphi (x\dot{y} - \dot{x}y) dt = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r \cos t \cdot r \cos t + r \sin t \cdot r \sin t dt = \frac{r^2}{2} \varphi.$$

Für $\varphi = 2\pi$ ergibt sich πr^2 (die Kreisfläche).

Flächenberechnung

Aus dem Integral erhält man die Fläche unter einer Funktion f bei positivem Integranden.

$$F = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Analog erklärt man die Fläche zwischen zwei Graphen:

Satz C.176. Sind $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann beträgt der Inhalt der von den Kurven $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ berandeten Fläche

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Rotationskörper

Satz C.177. Ein durch Drehung des Graphen $y = f(x)$ (f stetig, $a \leq x \leq b$) um die x -Achse erzeugter Rotationskörper hat das Volumen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Beispiel C.178. Aus dem Graphen von $f(x) = cx$ ($c \in \mathbb{R}$) entsteht durch Drehung um die x -Achse der Kegel mit Radius $r = ch$. Es folgt

$$V = \pi \int_0^h c^2 x^2 dx = \frac{\pi}{3} c^2 h^3 = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

mit $r = ch$.

Beispiel C.179. Aus dem Graphen von $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ entsteht durch Drehung um die x -Achse die Halbkugel mit Radius r . Es gilt für deren Volumen

$$V = \pi \int_0^r r^2 - x^2 dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Bekanntlich ist $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = 2V$.

Satz C.180. Die Mantelfläche des aus $y = f(x)$ entstehenden Rotationskörpers ist

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Beispiel C.181. Aus dem Graphen von $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ entsteht durch Drehung um die x -Achse die Halbkugel vom Radius r . Für deren Mantelfläche gilt

$$M = 2\pi \int_0^r \sqrt{(r^2 - x^2)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2} dx = 2\pi r^2.$$

C-7.5 Mehrfachintegrale

Motivation

Funktionen können von mehreren Variablen abhängen, wie zum Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Lassen sich für solche Funktionen Begriffe wie das Integral sinnvoll definieren?

Wir beschränken uns hier auf Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem rechteckigen Definitionsbereich $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Unser Ziel ist die Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von f .

Definition C.182 (Zerlegung). 1. $\mathcal{Z} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}_i$ heißt *Zerlegung* von $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

2. Man nennt $\eta(\mathcal{Z}) := \max_{i,j} \{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\}$ die *Feinheit* von \mathcal{Z} .

Definition C.183. Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung.

1. Die Mengen $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$ heißen Teilquader der Zerlegung und $|Q_{ij}| := |x_i - x_{i+1}| \cdot |y_i - y_{i+1}|$ bezeichne den Flächeninhalt von Q_{ij} .

2. Summen der Form

$$U_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x,y) \cdot |Q_{ij}|$$

$$O_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} \sup_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x,y) \cdot |Q_{ij}|$$

heißen *Riemannsche Unter- bzw. Obersumme* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} . Für beliebige Punkte $(\xi_{ij}, \mu_{ij}) \in Q_{ij}$ heißt

$$R_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \mu_{ij}) \cdot |Q_{ij}|$$

eine *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung \mathcal{Z} .

Bemerkung:

Aanlog zu den entsprechenden Aussagen für eindimensionale Riemannintegrale gilt:

1. $U_f(\mathcal{Z}) \leq R_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z})$.
2. Die Hinzunahme weiterer Zerlegungspunkte x_i oder y_j vergrößert Untersummen und verkleinert Obersummen.
3. Für beliebige Zerlegungen \mathcal{Z} und \mathcal{Z}' ist stets $U_f(\mathcal{Z}) \leq O_f(\mathcal{Z}')$;

Definition C.184. Existieren die Grenzwerte

$$\int \int_D f(x, y) dx dy := \sup_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } D} \{U_f(\mathcal{Z})\}$$

$$\int \int_D^- f(x, y) dx dy := \inf_{\mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } D} \{O_f(\mathcal{Z})\}$$

so heißen sie *Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral*.

Definition C.185. Eine Funktion $f(x, y)$ heißt *(Riemann)integrierbar* über D , falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen.

$$\int \int_D f(x, y) dx dy := \int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_D^- f(x, y) dx dy$$

heißt dann das *(Riemann-)Integral* von $f(x, y)$ über D .

Satz C.186 (Eigenschaften des Mehrfachintegrals). Seien f und g integrierbare Funktionen. Es gelten folgende Aussagen:

(a) **Linearität**

$$\int \int_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \int \int_D f dx dy + \beta \int \int_D g dx dy.$$

Satz C.187 (Eigenschaften des Mehrfachintegrals (Forts.)). (b) **Monotonie** Gilt $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$, so folgt

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \leq \int \int_D g(x, y) dx dy.$$

(c) **Nichtnegativität** Wenn $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in D$, dann gilt

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

(d) **Zusammensetzung von Integrationsbereichen** Sind D_1, D_2, D Rechtecke mit $D = D_1 \cup D_2$ und $|D_1 \cap D_2| = 0$, so ist $f(x, y)$ genau dann über D integrierbar, wenn $f(x, y)$ über D_1 und D_2 integrierbar ist. Es gilt dann:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Satz C.188 (Riemannsches Kriterium). f ist genau dann über D integrierbar, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung \mathcal{Z} von D existiert, so dass:

$$O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \leq \epsilon.$$

Satz C.189 (Satz von Fubini). Sei $D := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Rechteck. Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist und die Integrale

$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \text{ und } G(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ sowie $y \in [a_2, b_2]$ existieren, so gilt:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} F(x) dx = \int_{a_2}^{b_2} G(y) dy$$

Bemerkung

Der Satz von Fubini ermöglicht die Berechnung von Doppelintegralen auf die Integration von Funktionen einer Variablen zurückzuführen.

Verallgemeinerung

Ist $g(x) \geq c$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$, so gilt für das Gebiet

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], c \leq y \leq g(x)\}$$

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^{g(x)} f(x, y) dy$$

Bemerkung

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich direkt auf Mehrfachintegrale in drei oder mehr Variablen verallgemeinern.

C - 8 Zusammenfassung

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Die reellen Zahlen \mathbb{R} bilden einen geordneten Körper, der bezüglich der Supremums und Infimumsbildung abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass \mathbb{R} vollständig ist, d.h. jede Cauchyfolge von reellen Zahlen einen Grenzwert in \mathbb{R} besitzt.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind nicht vollständig, die komplexen Zahlen $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ sind nicht mehr vollständig geordnet.
- Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} sind abzählbar, d.h. gleichmächtig zu ihrer Untermenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen in jedem offenen Intervall (a, b) mit $a < b$ sind bereits überabzählbar.
- Jede rationale Zahl hat eine endliche oder periodische Dezimal- und Binärdarstellung.
- Sowohl die rationalen \mathbb{Q} wie die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in \mathbb{R} .

Konvergenz von Folgen, Satz C.47

- Eine Folge konvergiert genau dann wenn sie eine Cauchy Folge ist.
- Eine monoton wachsende Folge konvergiert wenn sie nach oben beschränkt ist, sonst heisst sie uneigentlich konvergent gegen ∞ .
- Liegt eine Folge zwischen zwei konvergierenden Folgen mit demselben Grenzwert c so konvergiert sie auch gegen c .

Erweiterung

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge. Man nennt \mathbb{R} deshalb *folgenkompakt*.

Konvergenz von Reihen

- Konvergenz der Reihe \Leftrightarrow Partialsummen der Reihenglieder a_n konvergieren als Folge.
- Absolute Konvergenz \Leftrightarrow Reihe der $|a_n|$ konvergiert \Leftrightarrow jede beliebige Umordnung konvergiert zu selbem Grenzwert.
- **Majorantenkriterium:** Absolute Konvergenz folgt aus $|a_n| \leq c_n$ für konvergente Folge c_n .
- **Quotientenkriterium:** Absolute Konvergenz folgt aus $\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \leq q$ für fast alle n und $q < 1$.
- **Wurzelkriterium:** Absolute Konvergenz folgt aus $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$ für fast alle n und $q < 1$.
- **Leibniz Kriterium:** Bedingte Konvergenz folgt aus $a_n a_{n-1} < 0$ und $|a_n|$ monotone Nullfolge.

Grenzwerte von Funktionen

- Grenzwert $c = \lim_{x \rightarrow z} f(x)$ wenn sie durch die Setzung $f(x_0) = c$ dort stetig wird. (Sie muss ohnehin für alle x nahe z definiert sein).
- Monoton wachsende Funktionen $f(x)$ haben immer einen Grenzwert $c = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, der uneigentlich heisst wenn $c = +\infty$ ist.
- Besonders wichtig sind für $y = f(x)$ die Grenzwerte der Differentialquotienten

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{x \rightarrow z} f'(z) = \frac{dy}{dx}$$

welche bei Existenz die Ableitung von f an der Stelle z ergeben.

Kombination von Grenzwerten

- Haben zwei Folgen oder Funktionen an derselben Stelle die Grenzwerte a und b so haben die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten der Folgen bzw Funktionen die Grenzwerte $a + b$, $a - b$, $a * b$ und a/b . Die Grenzwertbildung ist also ein Ringhomomorphismus.
- Hierbei gelten für endliches $c > 0$ folgende 'uneigentliche' Regeln

$$\pm\infty + c = \pm\infty, \pm\infty * c = \pm\infty, c/\infty = 0, \text{ und } c/0 = \pm\infty$$

Im letzten Falle muss die Konvergenz des Nenners monoton sein.

- Während die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $0 * \infty$ unbestimmt bleiben können ∞/∞ und $0/0$ gegebenenfalls mit der Regel von de l'Hopital, d.h. durch eventuell wiederholtes simultanes Differenzieren von Zähler und Nenner ausgewertet werden.

Vererbung von Funktionseigenschaften

- Stetigkeit und (wiederholte) Differenzierbarkeit von Funktionen auf einem vorgegebenen offenen Intervall (a, b) vererben sich auf deren Summen, Differenzen und Produkte und Quotienten, vorausgesetzt die Nennerfunktion hat dort keine Nullstellen. Dasselbe gilt für bestimmte Riemann-Integrierbarkeit in geschlossenen Intervallen $[a, b]$. Alle diese Mengen bilden reelle Vektorräume unendlicher Dimension.
- Differentiation und unbestimmte Intergration, bei der die obere Grenze variabel ist, sind bis auf eine additive konstante zueinander inverse Operatoren. Sie sind beide linear, d.h. Vektorraumhomomorphismen. Die Differentiation und Integration von Produkten erfolgt mit Hilfe der Produktregel bzw Partieller Integration.

Mittelwertsätze

- **Stetige Funktion:** Jeder Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird an einer Stelle c zwischen a und b angenommen, so dass

$$(f(a) - f(c))(f(b) - f(c)) \leq 0 \quad \text{und} \quad (a - c)(b - c) \leq 0$$

- **Differenzierbare Funktion(en):** Die Funktionsdifferenz $f(b) - f(a)$ zwischen a und b ist gleich $b - a$ mal der Ableitung $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$. Quotient der Funktionsdifferenzen $f(b) - f(a)$ und $g(b) - g(a)$ ist gleich dem Quotient der Ableitungen $f'(c)$ und $g'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$.
- **Integrierbare Funktion:** Das bestimmte Integral von f zwischen a und b ist gleich $b - a$ mal der Funktion $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$.

Zusammengesetzte Funktionen

- Vorausgesetzt $z = g(y)$ ist auf allen Werten $y = f(x)$ für $a \leq x \leq b$ definiert, so erhält man die Komposition

$$z = h(x) \equiv g(f(x)) = [g \circ f](x) \neq [f \circ g](x) !!!!$$

- Sind g und f beide stetig oder beide sogar differenzierbar, so gilt dies auch für h . Im zweiten Falle ergibt sich die Ableitung nach der Kettenregel zu

$$h'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) \quad .$$

- Ist g stetig und f Riemann-integrierbar, so gilt letzteres auch für $h(x)$.
- Gibt es eine Funktion g , so dass $h(x) = [g \circ f](x) = x$ für alle $x \in [a, b]$, dann heisst $x = g(y)$ die Inverse-oder Umkehrfunktion von f . Sie existiert auf Intervallen $[a, b]$, in denen f streng monoton ist, und hat im differenzierbaren Falle die Ableitung

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(x)}$$