



Ausführliches Beispiel zur Lösung von Linearen Optimierungsproblemen Mathematik für Informatiker III

31.1.2006

Im Folgenden wird noch einmal *ausführlich* die grafische Lösung von Linearen Optimierungsproblemen und die Anwendung der geometrischen Variante des Simplexverfahrens anhand der Aufgabe aus der Probeklausur vorgeführt.

Aufgabe: Lineare Optimierung

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{bei} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

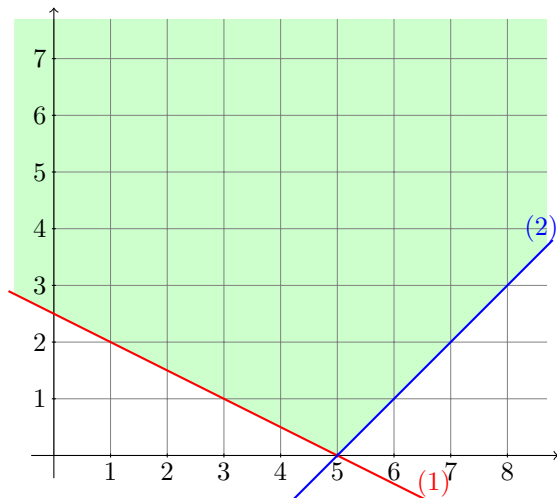
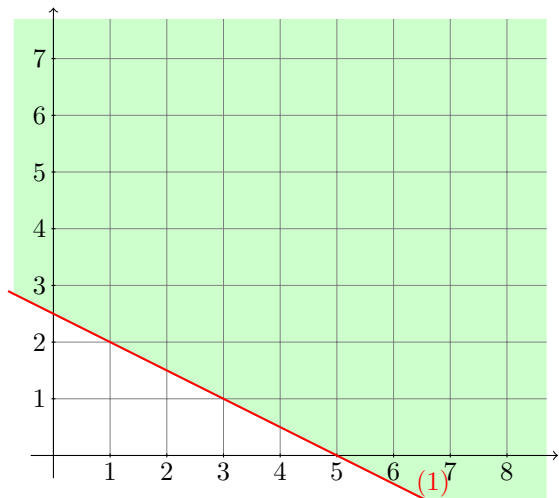
Löse das obige Optimierungsproblem grafisch.

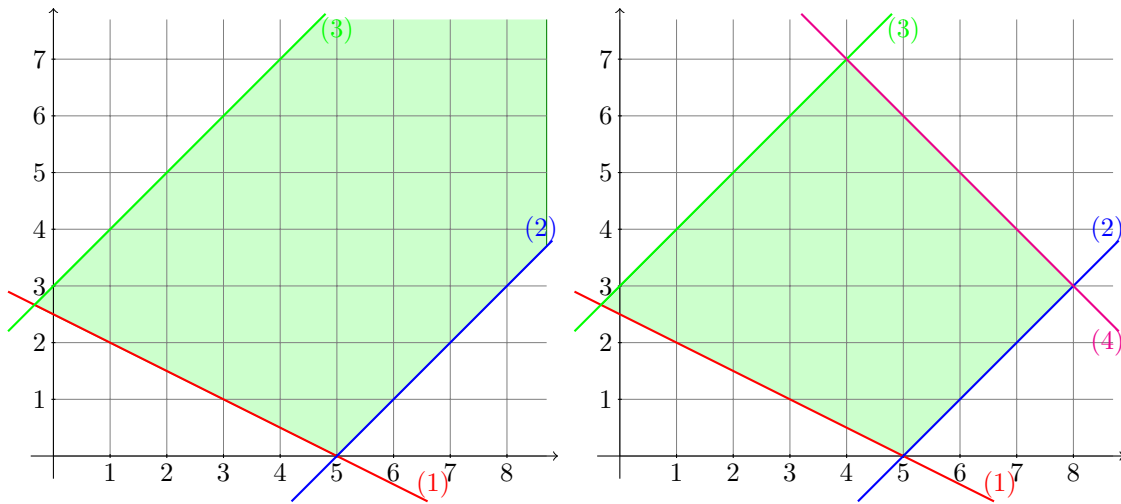
Lösung:

Zur grafischen Lösung macht es Sinn, alle Nebenbedingungen und die Zielfunktion so umzuschreiben, dass x_2 allein auf der linken Seite steht (wenn möglich). Wenn man sich dann das Relationszeichen als Gleichheitszeichen denkt, so hat man einfach zu zeichnende Geradengleichungen. Dann muss man nur noch überlegen, welcher Halbraum durch das Relationszeichen bestimmt wird.

Die umgestellten Nebenbedingungen lauten

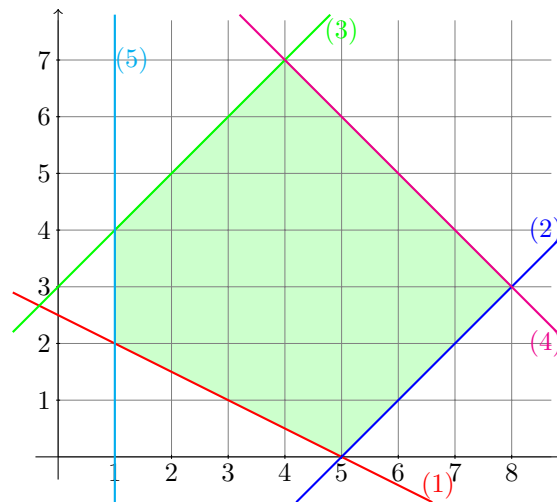
$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 \geq 5 & \Rightarrow & x_2 \geq -\frac{1}{2}x_1 + 2.5 \quad (1) \\ x_1 - x_2 \leq 5 & & x_2 \geq x_1 - 5 \quad (2) \\ x_1 - x_2 \geq -3 & & x_2 \leq x_1 + 3 \quad (3) \\ x_1 + x_2 \leq 11 & & x_2 \leq -x_1 + 11 \quad (4) \\ x_1 \geq 1 & & x_1 \geq 1 \quad (5) \end{array}$$





Nach dem

Zeichnen der letzten Nebenbedingung erhält man den zulässigen Bereich des Linearen Optimierungsproblems:



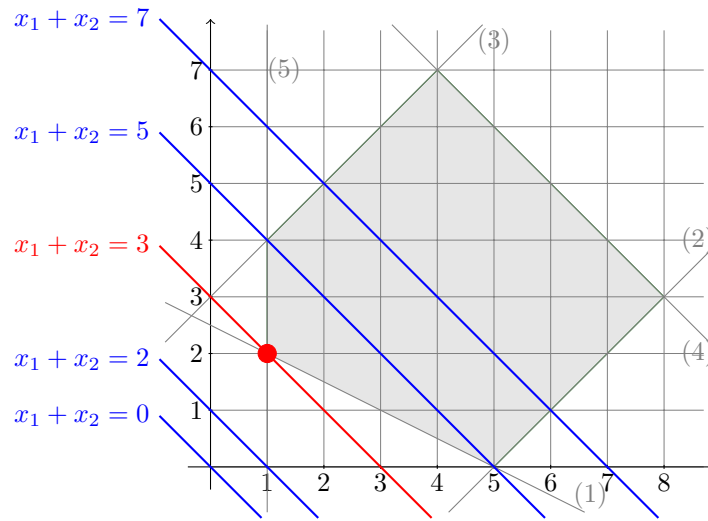
Nun zur Zielfunktion, und damit zur eigentlichen Lösung des Optimierungsproblems. Dazu werden sog. Höhen- oder Niveaulinien betrachtet, d.h. alle diejenigen Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, die den gleichen Funktionswert z liefern. Im Falle der linearen Zielfunktion $x_1 + x_2$ erhält man also

$$x_1 + x_2 = z, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ konstant}$$

und kann diese Gleichung sofort als Geradengleichung für festes z schreiben:

$$x_2 = -x_1 + z.$$

Im linearen Fall sind Höhenlinien immer parallele Geraden. Bei Minimierungsaufgaben wird nun das kleinste z^* gesucht, bei dem die zugehörige Gerade $x_2 = -x_1 + z^*$ den zulässigen Bereich berührt (Optimum ist immer Ecke oder Kante, deshalb „Berührung“), bei Maximierungsaufgaben entsprechend das größte z^* . Startet man z.Bsp. mit $x_2 = -x_1 + 0$, so kann man in der grafischen Darstellung erkennen, dass $z^* > 0$ gelten muss, da die Gerade mit $z = 0$ unterhalb des zulässigen Bereiches verläuft und somit z vergrößert werden muss (Parallelverschiebung der Gerade $x_2 = -x_1$ nach oben bedeutet eine parallele Höhenlinie mit größerem Wert für z). Auf diese Weise findet man mehr oder weniger schnell die Gerade $x_2 = -x_1 + 3$, die im Punkt $(x_1, x_2) = (1, 2)^T$ den zulässigen Bereich berührt. Jede andere Gerade an oder durch den zulässigen Bereich hat ein größeres z .



Somit ist $(1,2)^T$ die Optimallösung und $z^* = 3$ ist der zugehörige optimale Zielfunktionswert.

Löse das obige Optimierungsproblem mit dem in der Vorlesung angegebenen Simplexverfahren. Benutze $(x_1, x_2) = (5,0)$ als Startecke.

Lösung:

Hinweis: Die Grafiken in dieser Teilaufgabe dienen nur dem besseren Verständnis, in der Klausur werden (wenn nicht anders angegeben) keine Bilder beim Simplex erwartet!

Hinweis

Die in der Vorlesung angegebene geometrische Variante des Simplexalgorithmus erfordert die Formulierung des linearen Optimierungsproblems in der Form

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{bei} \quad & Ax \leq b. \end{aligned}$$

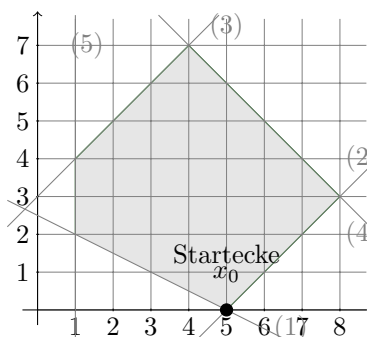
Dazu werden die Zielfunktion und alle Ungleichungen mit \geq mit -1 multipliziert und man erhält

$$\begin{array}{rcl} \min x_1 + x_2 & & \max -x_1 - x_2 \\ \text{bei} \quad x_1 + 2x_2 \geq 5 & \Rightarrow & \text{bei} \quad -x_1 - 2x_2 \leq -5 \quad (1') \\ \quad \quad x_1 - x_2 \leq 5 & & \quad \quad x_1 - x_2 \leq 5 \quad (2') \\ \quad \quad x_1 - x_2 \geq -3 & & \quad \quad -x_1 + x_2 \leq 3 \quad (3') \\ \quad \quad x_1 + x_2 \leq 11 & & \quad \quad x_1 + x_2 \leq 11 \quad (4') \\ \quad \quad x_1 \geq 1 & & \quad \quad -x_1 \leq -1 \quad (5') \end{array}$$

Damit haben wir mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = (-1, -1)^T, \quad b = (-5, 5, 3, 11, -1)^T$$

ein Optimierungsproblem in der für die geometrische Variante des Simplexverfahrens erforderlichen Form. Als Startecke des Simplexverfahrens wird der angegebene Punkt $x^0 = (5,0)^T$ benutzt.



(S0) **Starte mit einer zulässigen Ecke** $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Im Punkt $x^0 = (5, 0)^T$ sind die Ungleichungen (1') und (2') mit Gleichheit erfüllt, d.h. 1 und 2 bilden die Zeilenindexmenge oder Basis $B = \{1, 2\}$. Wir haben also

$$x^0 = (5, 0)^T, \quad B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_B = (-5, 5)^T.$$

Die zugehörige Basisinverse ist

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Für eine schnelle Probe eignet sich

Hinweis

$$x^0 = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} + \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = x^0$$

(S1) **Ist x^0 optimal?**

$$u^T := c^T A_B^{-1} = (-1, -1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \not\geq 0$$

$\Rightarrow x^0$ nicht optimal.

(S2) **Finde eine Richtung mit nicht abnehmender Zielfunktion.**

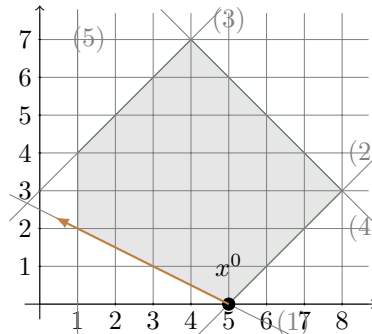
$$u_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = 2$$

Hinweis: Zur Bestimmung der Richtung mit nicht abnehmender Zielfunktion muß die Inverse der Basismatrix mit dem Einheitsvektor $e_{\tilde{i}_0}$ multipliziert werden. Der Index \tilde{i}_0 ist dabei die Nummer der Zeile der Basismatrix, in der die Nebenbedingung (i_0) steht¹.

Hinweis

Damit ergibt sich die gesuchte Richtung d als

$$d = -A_B^{-1} e_{i_0} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$



(S3) **Ist das Problem unbeschränkt?**

Hinweis: Das Problem ist unbeschränkt, wenn für alle Nebenbedingungen, die nicht in der aktuellen Basis vertreten sind, $\alpha_j^T d \leq 0$ gilt. Dabei bezeichnet α_j die Koeffizienten der j -ten Nebenbedingung, also die j -te Zeile der Matrix A .

Hinweis

Die nicht zur Basis B gehörenden Bedingungen bilden die sog. Nichtbasis $N = \{1, \dots, m\} \setminus B$, hier also $N = \{3, 4, 5\}$.

Ende
Hinweis

$$\begin{aligned} j = 3 : \quad \alpha_3^T d &= (-1, 1) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T = 1 > 0 \\ j = 4 : \quad \alpha_4^T d &= (1, 1) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3} \leq 0 \\ j = 5 : \quad \alpha_5^T d &= (-1, 0) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T = \frac{2}{3} > 0 \end{aligned}$$

Damit ist das Problem beschränkt, da $\alpha_3^T d > 0$ und $\alpha_5^T d > 0$ gilt.

¹Beispiel: Bei Verwendung von (1, 4) als Startpunkt hat man $B = \{4, 5\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $u^T = c^T A_B^{-1} = (-1, 0)$. Also ist $i_0 = 4$. Allerdings kann $e_4 = (0, 0, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^4$ nicht mit $A_B^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ multipliziert werden. Die Position der 4. Ungleichung (i_0 ist die Nummer der Ungleichung) in der Basis B ist 1, damit ist $\tilde{i}_0 = 2$ und mit $e_{\tilde{i}_0} = (0, 1)^T$ erhält man die zum Optimum führende Richtung $d = (0, 1)^T$.

(S4) Bestimme die Schrittweite, um zur nächsten zulässigen Ecke zu gehen.

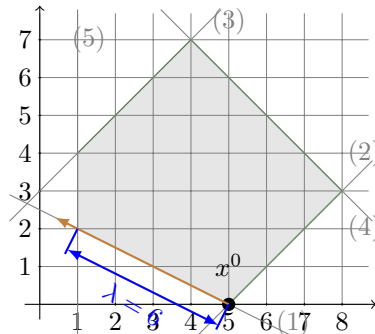
$$\lambda = \min \left\{ \frac{b_j - \alpha_j^T x^0}{\alpha_j^T d}, j \in N, \alpha_j^T d > 0 \right\}$$

$$\{j \in N | \alpha_j^T d > 0\} = \{3, 5\}:$$

$$j = 3: \lambda_3 = \frac{3 - (-1, 1)(5, 0)^T}{1} = 3 + 5 = 8$$

$$j = 5: \lambda_5 = \frac{-1 - (-1, 0)(5, 0)^T}{2/3} = \frac{3}{2}(-1 + 5) = 6$$

Also $\lambda = \min\{\lambda_3, \lambda_5\} = \lambda = 6$ und $j_0 = 5$.



(S5) Gehe zur nächsten Ecke.

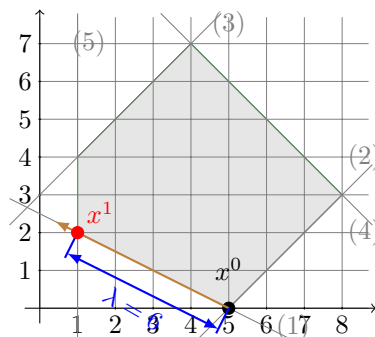
$$x^1 = x^0 + \lambda \cdot d = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x^1$$

und

$$B = B \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\} = \{1, 2\} \setminus \{2\} \cup \{5\} = \{1, 5\}$$

und damit

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_B = (-5, -1)^T.$$



(S1) Ist x^1 optimal?

$$u^T := c^T A_B^{-1} = (-1, -1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \geq 0$$

$\Rightarrow x^1 = (1, 2)^T$ ist optimal.

\Rightarrow Optimaler Zielfunktionswert $z^* = c^T x^1 = (-1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3$ und damit als optimaler Wert des Ausgangsproblems $z^* = 3$.