



Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

Serie 1. (Abgabe: bis 8.11.05)

Aufgabe 1: Riemannsche Zeta-Funktion

Die Riemannsche Zeta-Funktion ist für $x > 1$ wie folgt definiert:

$$\zeta(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-x}.$$

Sie kann durch die endlichen Partialsummen

$$\zeta_n(x) \equiv \sum_{k=1}^n k^{-x}$$

näherungsweise ausgewertet werden.

- (i) Schreibe ein Programm, in dem x , die Potenzen k^{-x} und die resultierenden Partialsummen $\zeta_n(x)$ durch einfach genaue Gleitkommazahlen dargestellt werden. Wähle das Abbruchkriterium so, dass n die kleinste Zahl ist mit

$$\text{fl}(\zeta_{n+1}(x)) = \text{fl}(\zeta_n(x)),$$

wobei 'fl' den mittels Gleitkommarechnung erhaltenen Wert des Argumentes bedeutet. Führe das Programm unter anderem für $x = 2, 1 + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{1024}, 1$ aus.

Vergleiche das erste Ergebnis mit der mathematischen Identität $\zeta(2) = \pi^2/6$. **(12.5 Punkte)**

- (ii) Erweitere das obige Programm so, dass nach Abbruch der Vorwärtssummiert die Terme k^{-x} erneut berechnet und summiert werden, und zwar diesmal in umgekehrter Reihenfolge.

Vergleiche die Ergebnisse durch Ausgabe der jeweiligen Differenz zwischen der Vorwärts- und der Rückwärtssumme für $x = 2, 1 + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{1024}, 1$.

Erstelle eine Tabelle der Fehler zwischen dem exakten Wert $\zeta(2)$ und der $n_i = 10^i$ -ten ($i = 1, \dots, 10$) Partialsumme $\zeta_{n_i}(2)$!! Interpretiere die Beobachtungen! **(12.5 Punkte)**

- (iii) Beobachte, was für dieselben Werte von x passiert, wenn im obigen Programm alle reellen Variablen doppelt genau vereinbart werden.

Erkläre die sehr unterschiedlichen Rechenzeiten.

(5 Punkte)

- (iv) **(fakultativ)** Um die Konvergenz der Reihe zu beschleunigen, schreibe eine reelle Funktion `FUNCTION a(x, j)`, welche die Reihe

$$a_j(x) = \sum_{k \geq 0} 2^k (j \cdot 2^k)^{-x}$$

auswertet. Hierbei soll wiederum so lange summiert werden, bis die Partialsummen unverändert bleiben. Nutze die alternierende Reihe

$$\zeta(x) = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} a_j(x),$$

um die Zeta-Funktion schneller auszuwerten, und zwar wiederum durch Summation, bis die Partialsummen der $a_j(x)$ konstant bleiben. Vergleiche die Ergebnisse und die Gesamtzahl der berechneten Potenzen der Form b^{-x} für das neue und das alte Programm. Was ergibt sich für $\zeta(2)$ bei dem neuen Programm? **(10 Punkte)**

Aufgabe 2: Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 44 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Löse obiges System in **einfacher Genauigkeit** mittels

- (a) Cramers Regel (4 Punkte)
- (b) Gauss ohne Pivotierung (4 Punkte)
- (c) Gauss mit Spalten-Pivotierung, (4 Punkte)

multipliziere die jeweils erhaltenen Lösung \tilde{x} mit A und vergleiche das Ergebnis mit der rechten Seite b . (je 1 Punkt)

(ii) Schätze den Lösungsfehler Δx_3 der ersten Komponente bei Anwendung von Cramers Regel ab! Schreibe dazu $\det(A)$ als Ausdruck der Elemente von A . Unter der Annahme, dass mit Multiplikationen mit 1 exakt ausgeführt werden leite eine obere Schranke für den Abstand zwischen dem exakten Wert von $\det(A)$ und dem mit $\text{eps} = 10^{-7}$ berechneten Wert her. Dabei können alle Werte der Ordnung eps^2 vernachlässigt werden.

Wiederhole die Untersuchung für $\det(A_3)$ wobei A_3 dadurch erhalten wird, dass die letzte Spalte von A mit b ersetzt wird. Leite eine obere Schranke für den Abstand zwischen dem durch Cramers Regel erhaltenen x_3 und dem exakten x_3 her. (10 Punkte)

(iii) Verifiziere die ermittelte Abschätzung. Berechne dazu eine Lösung x^* in doppelter Genauigkeit und prüfe, ob gilt

$$x_3^* \in [\tilde{x}_3 - \Delta x_3, \tilde{x}_3 + \Delta x_3].$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Klinsmann will Freistoss auf wissenschaftliche Grundlage stellen

Ein Fussballspieler tritt einen Freistoss. Die Entfernung zum Tor wird durch $w^* = w(t^*)$ bezeichnet (Weite zum Zeitpunkt $t = t^*$ des Überfliegens der Torlinie). Der Fussball fliegt durch den Tritt mit der Anfangsgeschwindigkeit v und im Winkel $\delta > 0$ vom Freistosspunkt weg.

Daraus ergibt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ die initiale vertikale Geschwindigkeit (in die **H**öhe)

$$\dot{h}(0) = \dot{h}_0 = v \cdot \sin \delta$$

sowie die initiale horizontale Geschwindigkeit (in die **W**eite)

$$\dot{w}(0) = \dot{w}_0 = v \cdot \cos \delta.$$

Betrachtet man die vertikale Bewegung ohne Luftwiderstand, dann erhält man in Abhängigkeit von der Flugzeit $t > 0$ als momentane Flughöhe $h = h(t)$ des Balls

$$h(t) = \dot{h}_0 \cdot t - t^2 \cdot \frac{g}{2}$$

mit der Fallbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Für die deutlich schnellere horizontale Bewegung ergibt sich unter Berücksichtigung der Luftreibung für die Entfernung $w = w(t)$ des Balls vom Abschusspunkt

$$w(t) = \frac{1}{c} \ln(1 + \dot{w}_0 \cdot c \cdot t)$$

mit dem Widerstandswert c .

In der Zeit bis zum Wiederanpfiff des Spiels legt der den Freistoss ausführende Spieler als erstes die Position fest, an der der Ball die Torlinie überschreiten soll. Der Spieler ermittelt danach die Entfernung w^* vom Freistosspunkt zur anvisierten Stelle auf der Torlinie, legt die an dieser Stelle gewünschte Ballhöhe h^* sowie den Eintrittswinkel δ^* fest und löst das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} h(t^*, \dot{h}_0, \dot{w}_0) &= h^* &= \dot{h}_0 \cdot t^* - t^{*2} \cdot \frac{g}{2} \\ w(t^*, \dot{h}_0, \dot{w}_0) &= w^* &= \frac{1}{c} \ln(1 + \dot{w}_0 \cdot c \cdot t^*) \\ \frac{\dot{h}(t^*, \dot{h}_0, \dot{w}_0)}{\dot{w}(t^*, \dot{h}_0, \dot{w}_0)} &= \tan \delta^* &= (\dot{h}_0 - t^* \cdot g) \cdot \left(\frac{1}{\dot{w}_0} + c \cdot t^*\right) \end{aligned}$$

(Bemerkung: Es werden Werte für t^* , \dot{h}_0 und \dot{w}_0 gesucht!!)

Aus der Lösung des Gleichungssystems kann der Spieler dann sehr einfach die für den korrekten Abschuss notwendigen Werte v und δ berechnen.

Ermittle eine Lösung (v, δ) für $h^* = 2\text{m}$, $w^* = 25\text{m}$, $\delta^* = -\tan(30) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $c = 0.05$ mittels Newton-Verfahren!

Falls kein Computer vorhanden ist, dann berechne mindestens einen Schritt des Newton-Verfahrens von Hand!

Hinweis: Verwende als Startpunkt des Newton-Verfahrens den Punkt $(t, \dot{h}_0, \dot{w}_0) = (t^{(0)}, \dot{h}_0^{(0)}, \dot{w}_0^{(0)}) = (1, 1, 12.5)$.

Erstelle eine Tabelle, in der für jeden Schritt $k = 1, 2, \dots$ des Newtonverfahrens neben der aktuellen Iterierten $x^{(k)} = (t^{(k)}, \dot{h}_0^{(k)}, \dot{w}_0^{(k)})$ auch das Residuum

$$F(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dot{h}_0^{(k)} \cdot t^{(k)} - \frac{1}{2}t^{(k)2} \cdot g & - & h^* \\ \frac{1}{c} \ln(1 + \dot{w}_0^{(k)} \cdot c \cdot t^{(k)}) & - & w^* \\ \left(\dot{h}_0^{(k)} - t^{(k)} \cdot g \right) \cdot \left(\frac{1}{\dot{w}_0^{(k)}} + c \cdot t^{(k)} \right) & - & \tan \delta^* \end{bmatrix}$$

angegeben wird. Bestimmung der Lösung (v, δ) nicht vergessen!! Bewerte die Konvergenzgeschwindigkeit!

Erster Newton-Schritt **(25 Punkte)**

Weitere Newton-Schritte **(15 Punkte)**