HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK
DR. NIEPAGE
JAN RIEHME

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

Serie 2 (Abgabe: bis 22.11.05)

Aufgabe 1: Löse folgende Anfangswertaufgaben:

(i) $y' = (y^3 + 1) sin(x)/y^2, \qquad y(0) = 1$ **(10 Punkte)**

(ii) $2(1 + x) + 3t\dot{x} = 0, \qquad x(1) = 0$ oder $x(1) = -2$ **(10 Punkte)**

(iii) $y'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 1 = y'(0)$ **(10 Punkte)**

Aufgabe 2: Numerische Lösung von Anfangswertproblemen

Wende den expliziten Euler und die Mittelpunktsregel auf das Problem

$$\dot{y} = y + t, \qquad y(0) = 1, \; T = 1$$

an. Verwende dabei die Schrittweiten $h = 1/n_k$ mit $n_k = 2^k$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, 9$. **(je 10 Punkte)**

Berechne die exakte Lösung $y(1)$ und plotte für beide Methoden $-\log|y_{n_k} - y(1)|$ über k in einem Diagramm. **(10 Punkte)**

Hierbei ist y_{n_k} der von der Methode in $n = 2^k$ Schritten erhaltene Wert.

Absolute Computermuffel rechnen hier die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ per Hand und versuchen das Verhalten der Fehlerkurven über k zu zeichnen und zu begründen.

Aufgabe 3: Numerische Lösung von Systemen von ODEs

Vom einem Startpunkt nahe am Ursprung (z.B. $(0.1, 0.1, 0.1)$) wende die Mittelpunktsregel auf das folgende System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung an:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -10x + 10y \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -8/3z + xy. \end{aligned}$$

Verifiziere zunächst über eine kurze Integrationsperiode $T = 1$ mit den gleichen Zeitschritten wie in Aufgabe 2, dass die numerische Integration tatsächlich mit der Ordnung zwei erfolgt. Dazu berechne die annähernde Fehlerkonstante

$$\tfrac{4}{3} \frac{\|a_{n_k} - a_{n_{k+1}}\|}{h_{n_k}^2}$$

mit $a_{n_k} = (x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})^T$ und untersuche, ob sie im Wesentlichen von k unabhängig ist. **(15 Punkte)**

Dann integriere über den längeren Zeitraum $T = 20$ (besser $T = 25$ oder $T = 30$) und beobachte die Abhängigkeit der Lösung von der Schrittzahl und dem Anfangspunkt, der immer noch nahe am Ursprung variiert werden kann. Stelle dabei sicher, das trotz nun deutlich vergrössertem Zeitintervall die gleichen Zeitschritte $h_k = 1/2^k$ verwendet werden! **(15 Punkte)**

Erstelle eine graphische Darstellung der Lösung (3-dimensional!!) vom Startpunkt $(0.1, 0.1, 0.1)$ für ein $k > 7$. **(10 Punkte)**

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5859 e-mail: griewank@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de
riehme@math.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~gaggle/MATHINF