**HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN**
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. PhD. Andreas Griewank
Dr. Niepage
Jan Riehme

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

**Serie 3 (Abgabe: bis 6.12.05)**

**Aufgabe 1:** Interpolation – Lagrange-Polynom, Kubische Splines und Ausgleichsprobleme

Berechne zu den Wertepaaren $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, 6$, mit den Stützstellen $x_{0\ldots6} = (-.6, -.3, -.1, 0, .1, .3, .6)$ und den Daten- oder Meßwerten $y_i = \frac{1}{1+25x_i^2}$ jeweils

**(i)** das interpolierende Polynom (Lagrange, 1.Semester)

**(ii)** den natürlichen kubischen Spline

**(iii)** ein Ausgleichspolynom 4.Ordnung (Gauß mit Ansatz $u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$)

Stelle die erhaltenen Approximationen grafisch dar. (**5 Punkte**)

Gib das tridiagonale Gleichungsystem des kubischen Splines mit dem zugehörigen Lösungsvektor der $z = (z_1, \ldots, z_{n-1})^T$ an. (**10 Punkte**)

Erstelle eine Tabelle der Koeffizienten $(a_i, b_i, c_i, d_i)$, $i = 1, \ldots, 6$, des kubischen Splines. (**5 Punkte**)

Gib die Koeffizienten des Ausgleichpolynoms an. (**5 Punkte**)

Störe nun den Meßwert $y_6$ durch Addition von 0.1 und berechne zu diesen gestörten Daten wiederum Lagrange-Polynom, kubischen Spline und Ausgleichspolynom der Ordnung 4. Visualisiere die Approximationen! (**5 Punkte**)

Untersuche die Auswirkung der Störung auf die drei Approximationen. Erstelle dazu eine Tabelle mit den Werten der Approximationen mit den nicht gestörten Daten (1.Spalte), den gestörten Daten (2.Spalte) und dem Betrag der Differenzen beider an den Zwischenstellen $\{-.45, -.2, -.05, .05, .2, .45\}$ (3.Spalte). Interpretiere die Reaktion der Approximationen auf die Störung der Daten! (**5 Punkte**)

**Zusatzaufgabe A:** Modifiziere die Gaußelimination so, dass das bei der Interpolation mit natürlichen kubischen Splines entstehende lineare symmetrische tridiagonale Gleichungssystem mit $n$ Gleichungen in $n$ Unbekannten mit maximal $n$ Divisionen gelöst wird! (**5 Punkte**)

**Zusatzaufgabe B:** Approximiere die gegebenen Daten mit einer nichtlinearen Ausgleichsfunktion mit dem Ansatz $u(x) = a + b\cos(cx)$. Benutze das Gauß-Newton-Verfahren vom Startpunkt $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. Gib die Koeffizienten der ermittelten nichtlinearen Ausgleichsfunktion an. (**5 Punkte**)

**Aufgabe 2:** Numerische Integration

Berechne in doppelter Genauigkeit Näherungen für den Wert der Integrale

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \sqrt{x^3}\, dx$$

mit

**(i)** der summierten Trapezregel (**je 5 Punkte**)

**(ii)** der Simpsonregel (**je 5 Punkte**)

**(iii)** dem Romberg - Verfahren. (**je 5 Punkte**)

Beginne jeweils mit der Schrittweite $h_1 = \frac{b-a}{2}$ und setze mit halbierter Schrittweite $h_k = \frac{b-a}{2^k} = h_{k-1}/2$, $k = 1, 2, \ldots$ fort (das ist die schon bekannte *Romberg*-Schrittweitenfolge). Verwende als Abbruchkriterium bei Trapez- und Simpson-Regel $|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}| \leq \delta |T_2|$ bzw. $|S_{2^k} - S_{2^{k-1}}| \leq \delta |S_2|$ mit $\delta = 10^{-12}$. Terminiere das Romberg-Verfahren, wenn zum ersten Mal $|R_k^k - R_k^{k-1}| \leq \delta |R_k^0|$ erfüllt ist.

Erstelle für beide Integranden eine Tabelle, in der für jedes $k = 1, 2, ..$ die berechneten Werte $T_{2^k}$, $S_{2^k}$,$R_k^0$, $R_k^1$, $\ldots$, $R_k^k$ angegeben werden. (Natürlich nur die Werte, die auch wirklich berechnet wurden! Wenn die Simpson-Regel beispielsweise bei $k = 3$ terminiert, dann stehen in der Spalte von $S_{2^k}$ eben nur drei Werte.) (**je Tabelle 5 Punkte**)

Gib für jeden Integranden in einer zweiten Tabelle den Fehler zum exakten Integral an! (Hinweis: $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos(x)\, dx = \frac{e^{\pi}-2}{5}$, $\sqrt{x^3}$ bitte selbst integrieren!). Vergleiche beide Tabellen. Interpretiere die beobachteten Unterschiede! Versuche eine Begründung für das Verhalten des Romberg-Verfahrens beim zweiten Integranden zu geben! (**10 Punkte**)

Erstelle für jeden Integranden ein Diagramm, in dem der negative Logarithmus des Fehlers von Trapezregel, Simpson-Regel und Romberg - Verfahren zum exakten Wert des Integrals über dem jeweiligen $k$ der zugehörigen Schrittweite $h_k$ dargestellt wird. Wenn $I = \int_a^b f(x)dx$ den exakten Wert des jeweiligen Integrals bezeichnet, so sind also (soweit vorhanden) die Werte

$$-\log |T_{2^k} - I|, \qquad -\log |S_{2^k} - I|, \qquad -\log |R_k^k - I|$$

für $k = 1, 2, \ldots$ zu plotten. Bewerte das Verhalten der Grafen. Welche Bedeutung könnten diese Werte haben? (**10 Punkte**)

**Zusatzaufgabe:** Bei der Berechnung der Trapezregel mit halbierter Schrittweite $h_k = h_{k-1}/2$ kann der Berechnungsaufwand gesenkt werden, indem bei Schrittweite $h_{k-1}$ berechnete Werte wieder benutzt werden. Gib eine Formel zur Berechnung von $T_{2^k}$ unter Verwendung von $T_{2^{k-1}}$ an. (**5 Punkte**)

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5859 e-mail: griewank@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de
riehme@math.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/~gaggle/MATHINF