



Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

Serie 4 (Abgabe: bis 3.1.2006)

Lineare Optimierung

Aufgabe 1: $\|\cdot\|_1$ -Approximationsaufgabe

Formulieren Sie für das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad m > n$$

die $\|\cdot\|_1$ -Approximationsaufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1$$

als lineares Optimierungsproblem.

(10 Punkte)

Hinweis: Die $\|\cdot\|_1$ -Norm ist definiert durch $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^m |v_i|$ für $v \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 2: Modellierung einer linearen Optimierungsaufgabe

Eine Großstadt hat für ein Bauprojekt in den nächsten fünf Jahren jeweils zum Jahresbeginn den folgenden Finanzbedarf:

Jahr	1	2	3	4	5	Bemerkung
Finanzbedarf	10	8	6	4	2	in Mio. €

Man will sich diese Mittel über die Ausgabe langfristiger Anleihen beschaffen. Zu Beginn eines jeden Jahres können solche Anleihen an Anleger verkauft werden (Fester Einheitskurs: 1€ je Anteilsschein). Alle Anleihen werden nach genau sechs Jahren (vom jetzigen Zeitpunkt an gerechnet) von der Stadt an die Anleger ausbezahlt. Dabei ist die Verzinsung jeweils in der Rückzahlung bereits enthalten. Der Rückzahlungskurs wurde wie folgt festgesetzt:

Aufgenommen im Jahr	1	2	3	4	5
Rückzahlungskurs (in%)	150	140	131	122	114

Die Stadtverwaltung steht nun vor der Frage, ob man nicht vielleicht Anleihen auf Vorrat ausgeben soll, also wie die Ausgabemengen der fünf Anleihen zu bemessen sind.¹ Die Stadt kann noch nicht benötigte Mittel zu jeweils 7% Verzinsung jährlich (von Jahr zu Jahr) anlegen.

Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem zur Bestimmung der Ausgabemengen. (15 Punkte)

Zusatzaufgabe: Löse das lineare Optimierungsproblem mittels Standardsoftware (Matlab, Maple, ...). Interpretiere/Begründe das Ergebnis. (5 Punkte)

Aufgabe 3: Lineare Optimierungsaufgabe

Lösen Sie das folgende Problem graphisch und mit dem Simplex-Algorithmus (per Hand, erste zulässige Ecke sei $(x_1, x_2) = (0, 0)$):

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(je 10 Punkte)

¹Wir gehen hier davon aus, dass die Anleihen so gefragt sind, dass sie vollständig ausgegeben werden können.

Aufgabe 4: Duales Programm für allgemeines LP

Schreiben Sie das LP in allgemeiner Form

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x + d^T y \\ Ax + By & \leq a \\ Cx + Dy & \geq b \\ Ex + Fy & = g \\ x & \geq 0 \end{aligned}$$

in der Form

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{c}^T \bar{x} \\ \bar{A} \bar{x} & \leq \bar{b}, \end{aligned}$$

bilden Sie davon das duale Programm und schreiben Sie dieses wieder mit Gleichungen, \leq - und \geq -Ungleichungen, vorzeichenbeschränkten und -unbeschränkten Variablen. (15**Punkte)****Aufgabe 5:** Dualität zweimalSei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das zum primalen Programm (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ Ax & \leq b \end{aligned} \quad (P)$$

gehörende duale Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & u^T b \\ u^T A & = c^T \\ u & \geq 0. \end{aligned} \quad (D)$$

Transformieren Sie (D) in die Form $\max d^T z, Mz \leq r$. Bilden Sie nun davon das zugehörige duale Programm (DD). Transformieren Sie (DD) in die Form $\max d^T z, Mz \leq r$ und vergleichen Sie mit (P). (15 Punkte)**Aufgabe 6:** Ganzzahliges Lineares Optimierungsproblem

Betrachtet wird das sogenannte Rucksackproblem:

$$\begin{aligned} \max \quad & w^T x \\ v^T x & \leq V \\ x & \leq b \\ x & \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{Z}_+^n$, $0 < w \in \mathbb{R}^n$, $0 < v \in \mathbb{R}^n$, $0 < b \in \mathbb{Z}^n$ und $0 < V \in \mathbb{Z}$.Wenn V das Gesamtvolumen des Rucksacks, v_i das Volumen des i -ten Gegenstandes ($i=1, \dots, n$) und w_i dessen Wert sowie b_i die zur Verfügung stehende Anzahl bezeichnet, so besteht das Rucksackproblem darin, den Rucksack mit einer Kombination der Gegenstände so zu befüllen, dass der enthaltene Wert maximal wird ohne das Volumen V des Rucksacks oder die Vorratsschranken b_i der Gegenstände zu verletzen.Löse das Rucksackproblem mit $V = 15$ und

i	1	2	3	4
w_i	5	6	7	8
v_i	4	5	6	7
b_i	2	1	2	2

mittels einem speziell an das Rucksackproblem angepassten *Branch & Bound* – Algorithmus. (Siehe Übungen bzw. Informationen unter <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~gaggle/MATHINF>).**(25 Punkte)**