



Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

Serie 5 (Abgabe: bis 26.1.2006)

Achtung: Abgabe der Serie 5 erfolgt nur schriftlich!

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1: Geburtstagsparadoxon

Angenommen ich befinde mich in einer Gruppe aus n Personen.

- (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine andere Person am gleichen Tag Geburtstag hat wie ich selbst? Für welche n ist diese Wahrscheinlichkeit $\geq \frac{1}{2}$? Für welche n ist sie $= 1$?
- (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben? Für welche n ist diese Wahrscheinlichkeit $\geq \frac{1}{2}$? Für welche n ist sie $= 1$?

Wir nehmen dabei an, daß in unserer Gruppe niemand am 29. Februar Geburtstag hat und daß es gleichwahrscheinlich ist, an einem der 365 anderen Tage geboren worden zu sein.

(20 Punkte)

Aufgabe 2: Unabhängigkeit von Ereignissen I

In einer Urne liegen $2N$ Kugeln, wobei $N \geq 1$. Die Kugeln seien von 1 bis $2N$ durchnummeriert. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln entnommen, wobei vor der Ziehung der zweiten Kugel die erste wieder in die Urne zurückgelegt wird. Bei jeder einzelnen Ziehung werde jede in der Urne vorhandene Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen.

- (i) Gib einen geeigneten Ergebnisraum Ω und für jedes Elementarereignis dessen Wahrscheinlichkeit an. Wie ist dadurch die Wahrscheinlichkeit für ein beliebiges Ereignis definiert?
- (ii) Wir betrachten die folgenden drei Ereignisse.
 - A „Die Nummer der ersten Kugel ist gerade.“
 - B „Die Nummer der zweiten Kugel ist ungerade.“
 - C „Die Summe der Nummern der beiden Kugeln ist gerade.“

Untersuche, ob die Ereignisse paarweise unabhängig sind.

- (iii) Prüfe, ob auch die Familie der Ereignisse (A, B, C) unabhängig ist. (Dafür muß zusätzlich zu der paarweisen Unabhängigkeit noch geprüft werden, ob die Produktformel $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ gilt.)

(20 Punkte)

Aufgabe 3: Unabhängigkeit von Ereignissen II

Wiederhole die Untersuchungen aus Aufgabe 2 für den Fall, daß die erste gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird.

(20 Punkte)

Aufgabe 4: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$. Zeige:

- (i) Durch die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A) := P(A|B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert.
- (ii) Ist $A \subset B^C$ oder $P(A) = 0$, so ist $P(A|B) = 0$.

(20 Punkte)

Aufgabe 5: Anwendung der Formel von Bayes

An einer Hochschule, an der 40% der Studierenden Frauen sind, studieren 25% der männlichen Studenten und 10% der Studentinnen Informatik.

- Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein Studierender der Informatik männlich ist.
- Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß jemand, der nicht Informatik studiert, eine Frau ist.

(20 Punkte)