HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. PhD. Andreas Griewank
Dr. Niepage  Dr. Stefan Körkel
Jan Riehme  Dr. Julia Sternberg

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

**Serie 6 (Abgabe: bis 09.02.2006)**

**Achtung: Abgabe der Serie 6 erfolgt nur schriftlich!**

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

## Aufgabe 1: Multiple Choice

Bei einer Prüfung mit Multiple-Choice-Fragen werden drei Fragen gestellt, wobei für jede der drei Fragen zwei Antworten zur Auswahl vorliegen, von denen jeweils genau eine richtig ist. Die Antworten werden von einem nicht vorbereiteten Prüfling rein zufällig und unabhängig voneinander angekreuzt (Gleichverteilung). Sei $Z$ die Zufallsvariable, welche die Anzahl der richtigen Antworten angibt. Bestimme bei Zugrundelegung eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, P)$ die Verteilung der Zufallsvariable $Z$ bzgl. $P$.

**(10 Punkte)**

## Aufgabe 2: Spielbank

Eine Spielbank bietet folgendes Glücksspiel an: drei faire Würfel werden gleichzeitig geworfen, der Spieler erhält

- 66 Euro für drei Einsen,
- 10 Euro für zwei Einsen,
- 0 Euro sonst.

Der Einsatz pro Spiel beträgt 2 Euro.

**(i)** Ist das Spiel für die Spielbank vorteilhaft?

**(ii)** Welchen Gewinn kann die Spielbank oder der Spieler bei einer Serie von 100 Spielen erwarten?

**(10 Punkte)**

## Aufgabe 3: Kovarianz von Zufallsvariablen

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P)$ mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $P(1) = P(2) = \frac{2}{5}$ und $P(3) = P(4) = \frac{1}{10}$. Ferner seien die reellen Zufallsvariablen $X_1, X_2$ definiert durch

$$X_1(1) = 1,\ X_1(2) = -1,\ X_1(3) = 2,\ X_1(4) = -2,$$

$$X_2(1) = -1,\ X_2(2) = 1,\ X_2(3) = 2,\ X_2(4) = -2.$$

**(i)** Gib die Verteilungen von $X_1$ und $X_2$ an.

**(ii)** Berechne den Erwartungswert $E(X_i)$, die Varianz $Var(X_i)$ und die Streuung $\sigma_{X_i}$ für $i = 1, 2$.

**(iii)** Gib die gemeinsame Verteilung von
(i) $X_1$ und $X_1$,  (ii) $X_1$ und $-2X_2$,  (iii) $X_1$ und $X_2$
an. Skizziere die Verteilungen (i), (ii), (iii) jeweils in einem Diagramm. (Zeichne dazu Punkte in ein zweidimensionales Koordinatensystem ein mit entsprechender Angabe der Wahrscheinlichkeiten. Dabei sollen nur solche Punkte gezeichnet werden, die einer positiven Wahrscheinlichkeit entsprechen.)

**(iv)** Berechne zu jedem der drei Paare von Zufallsvariablen die Kovarianz. Untersuche ferner in allen drei Fällen, ob die jeweiligen Zufallsvariablen unabhängig sind.

**(30 Punkte)**

**Aufgabe 4: Mädchen und Jungen**

In einer Familie mit drei Kindern werden die Wahrscheinlichkeiten für Jungen und Mädchen als gleich angenommen. Berechne für die Anzahl der Jungen

**(i)** die Verteilungsfunktion,

**(ii)** den Erwartungswert und

**(iii)** die Varianz.

**(10 Punkte)**

**Aufgabe 5: Normalverteilung**

Die Brenndauer von Glühlampen sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 900 Stunden und einer Standardabweichung von 100 Stunden. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für eine Brenndauer

- zwischen 750 und 1050 Stunden,
- zwischen 800 und 1050 Stunden,
- kleiner als 650 Stunden,
- größer als 1200 Stunden und
- kleiner als 800 oder größer als 1200 Stunden.

**(10 Punkte)**

**Aufgabe 6: Varianz der Poisson-Verteilung**

Berechne die Varianz der Poisson-Verteilung

$$P_\lambda\left(X_{[0;T]} = k\right) = e^{-\lambda T \frac{(\lambda T)^k}{k!}}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

für beliebige $T > 0$, $\lambda > 0$.

**Aufgabe 7: Verteilung ohne Erwartungswert**

Zeige: Die Verteilung

$$P(X = k) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}, \quad k \in \{1, 2, \ldots\}$$

hat keinen (endlichen) Erwartungswert.

**(10 Punkte)**

**Aufgabe 8: Exponentialverteilung**

Beim radioaktiven Zerfall ist die Wartezeit bis zum ersten Zerfall gegeben durch

$$f_\lambda : [0, \infty[ \to I\!R : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$$

mit einem Parameter $\lambda > 0$.

**(i)** Zeige: $f_\lambda$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d. h. es gilt $f(t) \geq 0\ \forall t \in [0, \infty[$ und $\displaystyle\int_0^\infty f_\lambda(t)dt = 1$.

**(ii)** Berechne $P_\lambda(]T, \infty[)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß nach der Zeit $T$ noch kein Zerfall aufgetreten ist, und vergleiche mit der Poissonverteilung und der Interpretation, die wir in der Vorlesung gegeben haben.

**(iii)** Berechne Erwartungswert und Varianz der durch $f_\lambda$ definierten Verteilung.

**(10 Punkte)**