Wiederholung:

Polynom als Funktionsmodell zur Abspeicherung von graphischen Daten mit Funktionen

1.)

exp(x) = ?

$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \Rightarrow$ Polynomdarstellung

Auswertung von Polynom:

1.) Endlich viele Koeffizienten: $a_0, \ldots, a_3$
2.) Effiziente Auswertung (Horner Schema)

x = ½ exp($\frac{1}{2}$) = ?

$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$

Horner Schema

$P(x) = 1 + x\left(1 + x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} x\right)\right)$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\right)\right) \approx 1{,}64 \approx \exp\left(\frac{1}{2}\right)$

2.) **Interpolationspolynom**

Aufgabe: Stützstellen

$(x_i, y_i)\; i = 0, \ldots, n$

$\Rightarrow$ Polynom, d.h. vollständige Darstellung,

1.) n + 1-Stützstellen $\Rightarrow$ Polynom von Grad (n)
2.) 2,3 Stützstellen (Splines) $\Rightarrow$ Finite Elemente Dartstellung

Graphische Ausgabe von Spline (Polynom der Ordnung 3)

x_i	1	2	4
y_i	3	1	5

Mit

Gesucht: P(x) = y das die Stützstelenwerte der Tabelle erfüllt

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P(x) = 3 \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 1 \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 5 \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{3}{4} x^2 - 6x + \frac{23}{3}$$

Schnelle Auswertung zum Lagrange-Interpol. Polynom

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{y}\;; \quad \frac{Q(x)}{x - x_i}$$

$$\widetilde{y}_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} (x_i - x_j)} \qquad Q(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Nullstellenberechnung von $P(x) = x^n - a = 0$

$\Rightarrow$ $x^1 = a$ $\quad a > 0 \quad x = \sqrt[n]{a} = \exp^{\frac{1}{n}\ln a}$

Die Lösung wird durch die Reihenentwicklung von $\exp^{\frac{1}{n}\ln a}$ berechnet

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\ln(x) = 2\left[\frac{(x-1)}{(x+1)} + \frac{(x-1)^3}{3\cdot(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5\cdot(x+1)^5} + \ldots\right]$$

$$\exp^{\frac{1}{n}\ln a} = 1 + \frac{1}{n}\ \ln a(a) + \frac{1}{2!}\ \frac{1}{n}$$

$x^n - a = 0$ hat man in $\mathbb{C}$ sogar n – Nullstellen

$\Downarrow$

$X^n - 1 = 0$

Nullstellenbestimmung in Rechner: **Newton-Methode**:

$$x_{neu} = x_{alt} - \frac{P(x_{alt})}{P'(x_{alt})} \qquad \text{P' ist die Ableitung von P}$$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{P(x_{i-1})}{P'(x_{i-1})} \qquad i = 0, \ldots, n \qquad x_0 = \text{Startwert}$$

$\exists$ i mit $| x_i - x_i - 1 | < \varepsilon$

Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren und konvergiert mit Ordnung $0(n^2)$. Mit der Enschränkung $P'(x)$ existiert und ist glatt. Glatt bedeutet Differenzierbar.

Polynommultiplikation ist deutlich aufwendiger als Polynomaddition.
Multiplikation hat Aufwand $0(n^2)$.
Addition hat Aufwand $0(n)$.

Möglichkeiten die Polynommultiplikation effizient zu berechnen:

1.) Karatsuba (1962)
2.) AFT

$\Rightarrow$ Bewiesen ist dass 0(log n , n) die untere Schranke ist, da man [?] hat

Idee von Karatsuba:

$N = 2^p$, d.h. Polynomgrad ist durch 2 divergierbar, d.h. $n/2$ - 1 Halbierung ist möglich

$$a(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{\frac{n}{2}-1} x}_{al(x)}$$

$$+a_{\frac{n}{2}-1} \cdot x^{\frac{n}{2}} + \ldots + a_n x^n$$

$ah(x)$

Multiplikation:

2 Polynome: a(x) , b(x) ,

sei deg(a(x))

c(x) = a(x) · b(x) = deg(a(x)) = (al (x) + $\widetilde{a}h$ (x)) · (bl(x) + $\widetilde{b}h$ (x)) mit ah(x) = $x^{n/2}$ ($a_{\frac{n}{2}}$ + … + a_n · $x^{n/2}$)

$\widetilde{a}h$ (x) = $\widetilde{a}h / x^{n/2}$

$$c(x) = [al(x) + x^{W_2} ah(x)]$$

$$[bl(x) + x^{n/2} bh(x)]$$

$$= al \cdot bl + x^n ah \cdot bh + x^{n/2}(al \cdot bh + ah \cdot bl)$$

$\Rightarrow$ Aufwand $4\left(\frac{n}{2}\right)^2 = n^2$

Idee: Die Ausklammerung der gemischten Terme:

$$c = al \cdot bl + x^n \cdot ah \cdot bh + x^{n/2}((al + ah)(bl + bh) - al \cdot bl - ah \cdot bh)$$

Man lost nun rekursiv die Multiplikation und hat für den gemischten nur 3 Multiplikation.

Beweis A.117:

Es gilt: a(x) = b(x) · q(x) + r(x) ;

Für festes b(x) mit m = deg(b(x)) zeigen wir dass n = deg (a(x)) ist, es gilt für beliebig m , n $\in \mathbb{N}$

a.) Induktionsanfang:
Für n < m gilt die Behauptung q(x) = 0
a(x) = r(x),

b.) Induktionsvoraussetzung:
Behauptung gilt für n < $\overline{n}$ $\geq$ m mit n $\geq$ m

c.) Induktionsschluss: $n = \overline{n} \geq m$

a(x) = a_n x^n + … + a_0
b(x) = b_n x^m + … + b_0 m $\leq$ n

d.) $x^{n-m}b(x) = b_m x^m + \ldots + b_0 x^{n-m}$

Berechne neues $\widetilde{a}$:

$$\widetilde{a}(x) = a(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b(x)$$

$$= \underbrace{\left(a_n - \frac{a_n}{b_m} b_m\right)}_{=0} x^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}\right) x^{n-1}$$

d.h. für $\widetilde{a}$ (x) existiert eine eindeutige Zerlegung, da $\overline{n} > n-1$ nach Voraussetzung:

$$\widetilde{a}(x) = \widetilde{q}(x) \cdot b(x) + r(x)$$

$$a(x) = \tilde{q}(x) \cdot b(x) + r(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} b(x) = \underbrace{\left(\tilde{q}(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right)}_{q(x)} b(x) + r(x)$$

$\Rightarrow$ dait existiert auch für $\overline{n} = n$ eine eindeutige Darstellung.