HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK
DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH
DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 1. (Abgabe: bis 3.11.04)

Aufgabe 1:

a) Bestimme ganzzahlige Vielfache von 5 und 7, welche sich nur um die Differenz 1 unterscheiden. **3 Punkte**

b) Warum folgt aus der gefundenen Identität, dass die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit der Hülle der Teilmenge $\{5, 7\}$ übereinstimmt, d.h., $\text{span}_{\mathbb{Z}}^{+,-}(\{5,7\}) = \mathbb{Z}$? **3 Punkte**

c) Bestimme die Hülle $\text{span}_{\mathbb{N}}^{*}(\mathbb{N}_{100})$ der Teilmenge $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ in der multiplikativen Halbgruppe $(\mathbb{N}, *)$. **5 Punkte**

d) Kann ganz $(\mathbb{N}, *)$ als Hülle $\text{span}_{\mathbb{N}}^{*}(\mathcal{U})$ einer endlichen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{N}$ dargestellt werden? **4 Punkte**

Aufgabe 2:
Betrachte die nichtkommutativen Ringe $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ bzw. $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ der 2×2 Matrizen mit ganzzahligen bzw. rationalen Einträgen.

a) Zeige, dass die Menge $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z}^{2\times 2}$ der rechtsoberen Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Z}$ einen Unterring von $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ bildet, d.h. es gelten $0 \in \mathcal{R}$, $1 \in \mathcal{R}$ sowie $A, B \in \mathcal{R} \implies$ **5 Punkte**

$$A + B \in \mathcal{R}, \quad A * B \in \mathcal{R}, \quad A + (-A) = 0,$$

wobei $(-A)$ durch Vorzeichenwechsel aller vier Einträge entsteht.

b) Sei nun $\mathcal{R} \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Menge der rechtoberen Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass es keinen Unterring $\mathcal{R}$ zwischen $\mathcal{R}$ und $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ gibt, d.h. **4 Punkte**

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{Q}^{2\times 2} \implies \mathcal{U} = \mathcal{R} \quad \vee \quad \mathcal{U} = \mathbb{Q}^{2\times 2}$$

Hinweis: Betrachte ein beliebiges Element $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \setminus \mathcal{R}$ und zeige dann, dass jedes andere Element $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ sich darstellen läßt als

$$B = L_1 * A + L_2 \quad \text{mit} \quad L_1, L_2 \in \mathcal{R}$$

c) Betrachte in der obigen Aufgabe **b)** die Menge $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{Q}$. Zeige, dass es in diesem Falle einen Zwischenring $\mathcal{R}$ gibt und gebe ein Beispiel an. **5 Punkte**

d) Zeige, dass die Vereinigung des Rings der rechtsoberen Dreiecksmatrizen $\mathcal{R}$ mit dem Ring der linksunteren Dreiecksmatrizen $\mathcal{L} = \mathcal{R}^T$ keinen Ring bildet. **3 Punkte**

e) Zeige, dass der Durchschnitt $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ einen kommutativen Ring bildet, aber weder ein Körper ist noch zu einem solchen erweitert werden kann. **3 Punkte**

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848
e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de