HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER

DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH

DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 7. (Abgabe: bis 15.12.2006)

Aufgabe 1:

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) Seien $\mathcal{R}$ ein Ring und $A, B \in \mathcal{R}$ beliebig. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ **3 Punkte**

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} B^{n-k} \, .$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: **4 Punkte**

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

c) (Bernoulli-Ungleichung) Sei $x > -1$ eine reelle Zahl. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ **2 Punkte**

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \, .$$

Aufgabe 2:

a) Finden Sie ein Beispiel für einen Ring $\mathcal{R}$, mit welchem im Polynomring $\mathcal{R}[x]$ die Gradgleichung $\deg(P(x) \cdot Q(x)) = \deg P(x) + \deg Q(x)$ nicht allgemeingültig ist. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $P(x) = x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]$ kein Inverses besitzt. **2 Punkte**

Aufgabe 3:

a) Finden Sie durch Ausprobieren von (auch negativen) Teilern des konstanten Glieds eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Z}$ des Polynomes **3 Punkte**

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \, .$$

Faktorisieren Sie das Polynom entsprechend der Zerlegung

$$P(x) = Q(x)(x - x_0) \, .$$

b) Bestimmen Sie die Anzahl reeller Nullstellen von $Q(x)$ und geben Sie eine Zerlegung von $P(x)$ in über $\mathbb{R}$ irreduzible Polynome an. **4 Punkte**

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den $GGT(A(x), B(x))$ der Polynome **3 Punkte**

$$A(x) = 6x^3 + 10x^2 + 11x - 5 \, ,$$
$$B(x) = 12x^2 - 7x + 1 \, ,$$

wobei $A(x), B(x)$ als Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$ zu betrachten sind.

b) **(Zusatzaufgabe)** Bestimmen Sie Polynome $S(x), T(x) \in \mathbb{Q}[x]$, mit welchen **4 Bonuspunkte**

$$GGT(A(x), B(x)) = S(x) \cdot A(x) + T(x) \cdot B(x)$$

gilt.

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848

e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de