HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER
DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH
DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Weihnachts-Bonus-Serie (Abgabe: bis 10.1.07)

Aufgabe 1:

Wenden Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus auf das Paar $(a, b) = (35343, 76449)$ an, um Konstanten $s, t \in \mathbb{Z}$ zu finden, so dass 3 Punkte

$$ggT(a, b) = a\,s + t\,b$$

gilt.

Aufgabe 2:

Finden Sie in $\mathbb{Z}_{107}$ bzw. in $\mathbb{Z}_{63}$ alle Lösungen (x, y) des Gleichungssystems 4/3 Punkte

$$\begin{aligned} \overline{12}\,x + \overline{3}\,y &= \overline{17} \\ \overline{5}\,x + \overline{17}\,y &= \overline{100} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{mn}$, 4 Punkte

$$\phi([x]_m, [y]_n) = [nx + my]_{mn} ,$$

repräsentantenunabhängig definiert ist sowie dass sie bijektiv ist.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie das kleinste $x \in \mathbb{N}$, welches die Äquivalenzrelationen 5 Punkte

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \mod 5 \\ 2x &\equiv 6 \mod 7 \\ 5x &\equiv 4 \mod 13 \end{aligned}$$

gleichzeitig erfüllt.

Aufgabe 5:

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Zeigen Sie (mittels vollst. Induktion oder direkt), dass dann die Identität

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle\, \mathbf{u}, \mathbf{v}\,\rangle^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T\mathbf{v} - \mathbf{u}^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \sum_{1 \le j < k \le n} (u_j v_k - u_k v_j)^2$$

erfüllt ist. Geben Sie, darauf basierend, an, wieviele Komponenten eine Verallgemeinerung des Kreuzproduktes auf die Dimension n haben müsste.

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848
e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de