**HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN**
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER
DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH
DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

# Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

**Serie 10. (Abgabe: bis 26.01.07)**

**Aufgabe 1:** Betrachte die folgenden vier Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = (2, -5, 4),\ \mathbf{v} = (-1, 2, 0),\ \mathbf{w} = (3, 1, -2),\ \mathbf{z} = (0, 0, 1)$$

**a)** Finde spezielle, nicht alle verschwindende Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so dass **4 Punkte**

$$\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} + \gamma\,\mathbf{w} + \delta\,\mathbf{z} = 0$$

**Hinweis:** Siehe z.B. die in der Vorlesung vorgeführte auf dem Kreuzprodukt basierende Version der Cramerschen Regel zur Berechnung der Koeffizientendarstellung eines Raumvektors bezüglich dreier vorgegebener linear unabhängiger.

**b)** Betrachte die Menge aller Vektoren $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, die diese Gleichung erfüllen. Zeige, dass sie einen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^4$ bilden. Bestimme eine Basis und damit die Dimension dieses Unterraumes. **4 Punkte**

**c)** Berechne das Volumen und die Oberfläche des von den Spitzen der vier Vektoren aufgespannten Tetraeders. **4 Punkte**

**Aufgabe 2:** Es sei $V$ ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Es sei durch **5 Punkte**

$$u \equiv v \iff u - v \in U, \qquad u, v \in V$$

eine Äquivalenzrelation auf $V$ definiert. Zeige, dass die Äquivalenzklassen mit den Operationenen $[u] + \lambda[v] = [u + \lambda v]$ wieder einen Vektorraum bilden.

**Aufgabe 3:** Es seien $\mathbf{a}_1 = (1, 3, -2, 5)$ und $\mathbf{a}_2 = (2, -6, 4, -1)$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Diese spannen einen Unterraum $U$ auf.

**a)** Zeige, dass $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ linear unabhängig sind. **2 Punkte**

**b)** Gib zwei verschiedene Vorschriften an, aus jeweils zwei der vier Komponenten eines Vektors $\mathbf{v} \in U$ dessen Koordinaten $x_1, x_2$ zur Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ zu bestimmen, so dass $\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$ gilt. **4 Punkte**

**c)** Gib an, wie die Koordinaten $x_1, x_2$ von $\mathbf{v} \in U$ aus den Skalarprodukten $\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{a}_1 \,\rangle$ und $\langle\, \mathbf{v}, \mathbf{a}_2 \,\rangle$ bestimmt werden können. **4 Punkte**

**d)** Wende das in c) bestimmte Verfahren auf den Vektor $\mathbf{w} = (1, -5, 4, -3)$ an. Aus den bestimmten Koordinaten $x_1, x_2$ konstruiere $\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 \in U$. Weise nach, dass die Differenz $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ senkrecht zu $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ steht. **4 Punkte**

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848
e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de