HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER

DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH

DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 10. (Abgabe: bis 26.01.07)

Aufgabe 1: Betrachte die folgenden vier Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = (2, -5, 4),\ \mathbf{v} = (-1, 2, 0),\ \mathbf{w} = (3, 1, -2),\ \mathbf{z} = (0, 0, 1)$$

a) Finde spezielle, nicht alle verschwindende Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so dass **4 Punkte**

$$\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} + \gamma\,\mathbf{w} + \delta\,\mathbf{z} = 0$$

Hinweis: Siehe z.B. die in der Vorlesung vorgeführte auf dem Kreuzprodukt basierende Version der Cramerschen Regel zur Berechnung der Koeffizientendarstellung eines Raumvektors bezüglich dreier vorgegebener linear unabhängiger.

b) Betrachte die Menge aller Vektoren $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, die diese Gleichung erfüllen. Zeige, dass sie einen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^4$ bilden. Bestimme eine Basis und damit die Dimension dieses Unterraumes. **4 Punkte**

c) Berechne das Volumen und die Oberfläche des von den Spitzen der vier Vektoren aufgespannten Tetraeders. **4 Punkte**

Aufgabe 2: Es sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Es sei durch **5 Punkte**

$$u \equiv v \iff u - v \in U, \qquad u, v \in V$$

eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Zeige, dass die Äquivalenzklassen mit den Operationenen $[u] + \lambda[v] = [u + \lambda v]$ wieder einen Vektorraum bilden.

Aufgabe 3: Es seien $\mathbf{a}_1 = (1, 3, -2, 5)$ und $\mathbf{a}_2 = (2, -6, 4, -1)$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Diese spannen einen Unterraum U auf.

a) Zeige, dass $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ linear unabhängig sind. **2 Punkte**

b) Gib zwei verschiedene Vorschriften an, aus jeweils zwei der vier Komponenten eines Vektors $\mathbf{v} \in U$ dessen Koordinaten x_1, x_2 zur Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ zu bestimmen, so dass $\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$ gilt. **4 Punkte**

c) Gib an, wie die Koordinaten x_1, x_2 von $\mathbf{v} \in U$ aus den Skalarprodukten $\langle\, \mathbf{v},\, \mathbf{a}_1 \,\rangle$ und $\langle\, \mathbf{v},\, \mathbf{a}_2 \,\rangle$ bestimmt werden können. **4 Punkte**

d) Wende das in c) bestimmte Verfahren auf den Vektor $\mathbf{w} = (1, -5, 4, -3)$ an. Aus den bestimmten Koordinaten x_1, x_2 konstruiere $\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 \in U$. Weise nach, dass die Differenz $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ senkrecht zu $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ steht. **4 Punkte**

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848

e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de