HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER

DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH

DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 11. (Abgabe: bis 1.02.05)

Aufgabe 1: Es bezeichne $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{R}[X]$ die Menge der Polynome vom Grad n oder kleiner.

a) Zeige, dass die Abbildung $A : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ mit $E(p) = \Big(p(-1), p(1), p(-2), p(2)\Big)^T$ linear ist und gib die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ bzgl. der Monombasis $1, X, X^2, X^3$ an. **3 Punkte**

b) Jedem Polynom $p \in \mathcal{P}_3$ seien die Reste **3 Punkte**

$$r^1(X) = r_0^1 + r_1^1 X = p(X) \bmod (X^2-1) \in \mathcal{P}_1 \quad \text{und} \quad r^2(X) = r_0^2 + r_1^2 X = p(X) \bmod (X^2-4) \in \mathcal{P}_1$$

zugeordnet. Bestimme die Abbildungsmatrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, die aus dem Koeffizientenvektor $\Big(p_0, p_1, p_2, p_3\Big)^T$ den Vektor $\Big(r_0^1, r_1^1, r_0^2, r_1^2\Big)^T$ erzeugt.

c) Zeige, dass für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_3$ die Identitäten $p(\pm 1) = r^1(\pm 1)$ und $p(\pm 2) = r^2(\pm 2)$ gelten. **2 Punkte**

d) Bestimme die Abbildungsmatrix $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, die den Koeffizientenvektor $\Big(r_0^1, r_1^1, r_0^2, r_1^2\Big)^T$ in den Wertevektor $\Big(r^1(-1), r^1(1), r^2(-2), r^2(2)\Big)^T$ transformiert. Überprüfe die Identität von A mit dem Produkt $C \cdot B$. **3 Punkte**

e) Bestimme die Inverse A^{-1} als Produkt der Inversen $B^{-1} \cdot C^{-1}$. **5 Punkte**

Aufgabe 2: Betrachte die (4×4)-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -20 & -3 & -14 \\ 8 & 10 & -14 & -12 \\ -3 & 18 & -4 & -13 \\ 20 & 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimme eine Zerlegung $A = LU$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L und einer oberen Dreiecksmatrix U (exakt oder mit einer Genauigkeit von 5 Dezimalstellen). **4 Punkte**

b) Bestimme für jede der rechten Seiten **6 Punkte**

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -26 \\ 34 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -31 \\ 32 \\ -19 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

eine Lösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$.

c) Bestimme die symmetrisierte Matrix $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$. **2 Punkte**

d) **(Zusatzaufgabe)** Bestimme auch für B eine LU-Zerlegung. Prüfe, ob es eine Diagonalmatrix D gibt, so dass $U = DL^T$ und damit $B = LDL^T$ gelten. **6 Bonuspunkte**

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848

e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de