1 (a) Sei $G = \{P + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\}. \qquad (\textit{Normalenform} \text{ von } G)$$

(b) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit $(A, B) \neq (0, 0)$. Sei G die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax+By+C = 0\}$, und sei $Q = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$d := \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

der Abstand von Q zu G ist.

(3+3 Punkte)

2 Seien G und G' zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$, die sich in einem Punkt P schneiden: $G \cap G' = \{P\}$. Sei $A \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der weder auf G noch auf G' liegt. Sei B der Schnittpunkt von G mit der Parallelen zu G' durch A, und sei C der Schnittpunkt von G' mit der Parallelen zu G durch A.

(a) Sei $\widetilde{G}$ eine Gerade durch A, die G in einem Punkt E und G' in einem Punkt F schneidet, wobei $E \neq P, F \neq P$. Beweisen Sie

$$\frac{PB}{PE} + \frac{PC}{PF} = 1. \tag{1}$$

Hinweis: Falls $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kollinear sind, ist $\frac{AB}{CD} \in \mathbb{R}$ definiert durch $\overrightarrow{AB} =: \frac{AB}{CD}\overrightarrow{CD}$.

(b) Seien $E \in G$ und $F \in G'$ zwei Punkte, für die die Gleichung (1) erfüllt ist. Beweisen Sie, dass $A \in G(E, F)$ liegt.

(3+3 Punkte)

3 Sei $\Delta(A; B; C)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Wie üblich sei $a := |BC|, b := |AC|$. Sei außerdem D der Mittelpunkt der Seite AB und sei $\delta := \sphericalangle(ACD), \varepsilon := \sphericalangle(DCB)$. Zeigen Sie

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{a}{b}.$$

(6 Punkte)

Allgemeine Hinweise:

- Die Abgabe in Zweiergruppen ist erlaubt.
- Kriterium für den Übungsschein: Mindestens 60% der Punkte auf den Übungszetteln
- Bitte schreiben Sie Namen, Matrikelnummer(n) und Übungsgruppe auf die Lösungsblätter. Heften Sie die Blätter zusammen, und beachten Sie, einen Korrekturrand zu lassen.
- Allgemeine Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie unter `http://www.math.hu-berlin.de/~post/elegeo10.html`
- Weitere beachtenswerte Hinweise finden Sie unter `http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt`