

Für $M \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ sei durch

$$S_{M,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{M\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{M\}, \quad P \mapsto M + \frac{r^2}{|P-M|^2}(P-M) \quad (1)$$

die *Inversion am Kreis* $K(M, r)$ definiert. Des Weiteren seien durch $T_M(P) = P - M$ und $D_r(P) = r \cdot P$ die *Translation* und Streckung (*Dilatation*) als Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

16

(a) Beweisen Sie unter ausschließlicher Verwendung der oben genannten Definitionen die folgenden Identitäten für Abbildungen.¹

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (D_r)^{-1} = D_{1/r}, & T_{M_1} \circ T_{M_2} &= T_{M_1+M_2}, \\ & D_r \circ S_{0, \frac{1}{r}} = S_{0,1} \circ D_r, & T_M \circ S_{M,r} &= S_{0,r} \circ T_M, \\ & T_{rM} \circ D_r = D_r \circ T_M, & S_{0,r} &= D_{r^2} \circ S_{0,1}. \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad T_{M_1} \circ S_{M_1, r_1} \circ S_{M_2, r_2} \circ T_{-M_2} = T_{\lambda M_2} \circ S_{\lambda M_2, 1/r_2} \circ S_{\lambda M_1, 1/r_1} \circ T_{-\lambda M_1} \text{ mit } \lambda := -(r_1 r_2)^{-2}.$$

(3+2 Punkte)

Die Abbildung $S_{M,r}$ kann nun auf $\overline{\mathbb{R}^2} := \mathbb{R}^2 \cup \{\varnothing\}$ ausgedehnt werden durch

$$S_{M,r}^*(x) := \begin{cases} \varnothing & x = M \\ M & x = \varnothing \\ S_{M,r}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsprechend werden die Translation und Dilatation durch die Definition

$$T_M(\varnothing) := \varnothing, \quad D_r(\varnothing) := \varnothing \quad \text{für alle } r > 0, \quad M \in \mathbb{R}^2$$

auf $\overline{\mathbb{R}^2}$ ausgedehnt.

(b) Zeigen Sie:

- (i) $S_{M,r}^*$ ist injektiv, d.h. $S_{M,r}^*(P) = S_{M,r}^*(Q)$ impliziert $P = Q$.
- (ii) $S_{M,r}^* \circ S_{M,t}^* = T_{-M} \circ D_{(r/t)^2} \circ T_M$.
- (iii) $S_{M,r}^*$ ist surjektiv, d.h. das Bild von $S_{M,r}^*$ ist $\overline{\mathbb{R}^2}$. Bestimmen Sie die inverse Abbildung $(S_{M,r}^*)^{-1}$.

(2+1+1 Punkte)

17

Sei M der Schnittpunkt zweier Geraden $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^2$.

- (a) Seien G eine Gerade, die L_1 und L_2 in den Punkten Q_1 und Q_2 schneidet, und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a > 0$. Zeigen Sie, dass $(S_{M,b}^{-1} \circ S_{M,a})(G)$ eine zu G parallele Gerade ist.
- (b) Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis, der $K(M, a)$ orthogonal schneidet, so dass $M \notin \mathcal{K}$ gilt. Außerdem soll $\mathcal{K}$ auch L_1 und L_2 in je zwei Punkten schneiden. Zeigen Sie durch Rechnung mit (1)

$$S_{M,a}(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \quad \text{sowie} \quad S_{M,a}(L_i \setminus \{M\}) = L_i \setminus \{M\}, \quad i = 1, 2.$$

(c) Folgern Sie aus (b) den Sekantensatz.

(3+4+2 Punkte)

¹Beachten Sie dabei, dass zwei Abbildungen nur dann gleich sein können, wenn auch ihre Definitionsbereiche übereinstimmen.