18 Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{Z} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1), \quad (1-x)y^2 = x^3\}.$$

(a) Beweisen Sie $\mathcal{Z} = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \mid \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ r = \sin\phi \cdot \tan\phi\}$ und skizzieren Sie $\mathcal{Z}$.

(b) Sei $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{P}$ die Parabel

$$\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}.$$

Beweisen Sie für die Inversion $S_{0,1}$ am Einheitskreis die Identität

$$S_{0,1}(\mathcal{Z} \setminus \{O\}) = \mathcal{P} \setminus \{O\}.$$

(3+3 Punkte)

19 Für zwei Zahlen $a, b > 0$ ist die *Ellipse* $\mathcal{E}_{a,b}$ definiert als

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

(a) Seien zwei Zahlen $c, d > 0$ gegeben. Wir betrachten alle möglichen Strecken der Länge c, deren einer Endpunkt auf der x-Achse und deren anderer Eckpunkt auf der y-Achse liegt. Jede solche Strecke verlängern wir über den auf der x-Achse liegenden Endpunkt hinaus um die Länge d. Zeigen Sie, dass alle möglichen Endpunkte (x,y) der verlängerten Strecke auf einer Ellipse liegen.

(b) Seien zwei Zahlen r, R mit $R > r > 0$ gegeben und $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Für je zwei Punkte $P \in K(O,r)$ und $P' \in K(O,R)$, die auf dem selben in O startenden Strahl liegen, sei Q der Schnittpunkt der Parallelen zur x-Achse durch P mit der Parallelen zur y-Achse durch P'. Zeigen Sie, dass die so erhaltenen Punkte Q auf einer Ellipse liegen.

(3+3 Punkte)

20 Gegeben sei der (Halb-)Kegel $\mathcal{C} = \{(t\cos\phi, t\sin\phi, t\tan\beta) \mid \phi \in [0, 2\pi), t < 0\}$. Dieser werde von der Ebene

$$H = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, n\rangle = d\}$$

geschnitten, wobei $n = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ mit $c > \cos\beta$, $|n| = 1$ und $d < 0$ gelte.

(a) Zeigen Sie wie in Aufgabe 1, dass der Abstand von einem Punkt M zu H durch $\operatorname{dist}(M,H) = |\langle M, n\rangle - d|$ gegeben ist.

(b) Eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r ist gegeben durch

$$K(M,r) := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid |P - M| = r\}.$$

Beweisen Sie mit Hilfe von (a): Es gibt genau zwei Kugeln K_1 und K_2, die sowohl $\mathcal{C}$ als auch H tangential berühren (sog. *Dandelinsche Kugeln*).

(2+4 Punkte)