Übungen zur Vorlesung Elementargeometrie
8. Übungsblatt Abgabe am 9.06.2010

PD Dr. O. Post
und Mitarbeiter

Bitte beachten Sie die Bemerkung am Blattende!

21

Zeigen Sie: Der Schnitt einer Kugel $K(M,r) \subset \mathbb{R}^3$ mit einer Ebene H ist leer oder ein *Kreis in* H, d.h. es gibt ein $M_2 \in H$ und $r_2 \geq 0$, so dass $K(M,r) \cap H = \{Q \in H \mid |Q - M_2| = r_2\}$. *(6 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie die Normalenform der Ebenengleichung.

22

Seien zwei Punkte F_1, F_2 in $\mathbb{R}^2$ und $l > |F_1F_2|$ gegeben. Sei

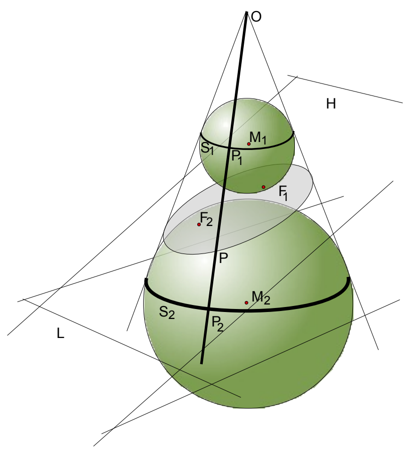
$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |PF_1| + |PF_2| = l\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ eine Ellipse ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $F_1 = (-r,0), F_2 = (r,0)$ und bestimmen Sie $a \geq b > 0$, so dass $\mathcal{E}_{a,b} \subset \mathcal{E}$. Zeigen Sie weiter $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{a,b}$, indem Sie aus $|PF_1|^2 = (l - |PF_2|)^2$ die Ellipsengleichung folgern. *(6 Punkte)*

23

In Aufgabe 20 wurde gezeigt, dass es unter den dort genannten Bedingungen genau zwei Kugeln K_1 und K_2 gibt, die sowohl den Halbkegel $\mathcal{C}$ als auch die Ebene H tangential berühren. Die Berührpunkte von H mit K_1 und K_2 werden jeweils mit F_1 und F_2 bezeichnet.



(a) Begründen Sie, dass der Halbkegel $\mathcal{C}$ von K_1 und K_2 in Kreisen S_1, S_2 berührt wird.

(b) Sei P ein Punkt auf $\mathcal{C} \cap H$ und $O = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Seien P_1 und P_2 die Berührpunkte von $G(O,P)$ mit K_1 und K_2. Zeigen Sie: $|PF_1| + |PF_2|$ ist unabhängig von der Wahl von P. (Damit ist $\mathcal{C} \cap H$ eine Ellipse.)

(c) Sei L der Schnitt von H mit der Ebene H_2, die durch $S_2 \subset H_2$ definiert ist. Zeigen Sie, dass (L, F_2) ein Brennpaar für die Ellipse $\mathcal{C} \cap H$ ist.

Hinweis: Tangentenabschnitte. *(1+3+2 Punkte)*

Ab diesem Blatt geben Sie bitte **jede Aufgabe auf eigenen, zusammengehefteten Blättern** ab. Die Lösungen werden dann aufgabenweise von den HiWis korrigiert.

Bei Fragen zur Korrektur:

(AF) Alexander Fauck: fauck@math.hu-berlin.de
(KK) Karoline Köhler: koehlerk@math.hu-berlin.de
(RR) Robert Rauch: rauch@math.hu-berlin.de