24 (a) Seien $a > b > 0$ und $G = \{(a^2/\sqrt{a^2-b^2},\, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\big((\sqrt{a^2-b^2}, 0), G\big)$ ein Brennpaar für die Ellipse $\mathcal{E}_{a,b}$ ist.

Sei $\mathcal{E}$ eine Ellipse mit den Hauptachsenlängen $2a > 2b > 0$ und den Brennpunkten F_1 und F_2. Der *Leitkreis* von $\mathcal{E}$ um F_1 ist $K(F_1, 2a)$. Der *Hauptkreis* von $\mathcal{E}$ ist $K(M, a)$, wobei M der Mittelpunkt von F_1F_2 sei. Sei $P \in \mathcal{E}$, und sei T die Tangente an $\mathcal{E}$ im Punkt P.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Winkelhalbierungseigenschaft der Tangente (Vorlesung), dass der Bildpunkt von F_2 unter der Spiegelung an T auf dem Leitkreis um F_1 liegt.

(c) Folgern Sie aus (b), dass der Endpunkt des Lotes von F_2 auf T auf dem Hauptkreis liegt.

(2+2+2 Punkte)

Bemerkung: Wegen (b) ist eine Ellipse der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Kreis und einem in dessen Inneren gelegenen Punkt den gleichen Abstand haben.

25 Seien $a, b > 0$ und $\mathcal{H}$ die Hyperbel $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$. Sei G eine Gerade, die einen Ast der Hyperbel in zwei Punkten $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ schneidet. Sei C der Schnittpunkt von G mit der Asymptoten von $\mathcal{H}$ mit Steigung $\frac{b}{a}$ und D der Schnittpunkt von G mit der anderen Asymptoten von $\mathcal{H}$. Beweisen Sie durch Rechnung: $|AC| = |BD|$. *(6 Punkte)*

Tipp: Schreiben Sie $C = A + t_0\overrightarrow{AB}$ und $D = B + t_1\overrightarrow{BA}$ und zeigen Sie $t_0 = t_1$.

26 (a) Seien $\mathcal{E}$ eine Ellipse und $\mathcal{H}$ eine Hyperbel, die beide die Brennpunkte F_1 und F_2 besitzen. Zeigen Sie mit Hilfe der Winkelhalbierungseigenschaft der Tangenten an $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$, dass sich $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ orthogonal schneiden. Skizzieren Sie mehrere solcher *konfokalen* (d.h. die gleichen Brennpunkte besitzenden) Ellipsen und Hyperbeln.

(b) Seien $\mathcal{P}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$ zwei Parabeln, die denselben Brennpunkt F und parallele Brenngeraden besitzen. Wir nehmen an, dass $\mathcal{P}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$ sich schneiden — sie müssen dann in entgegengesetzten Richtungen geöffnet sein. Zeigen Sie mit Hilfe der Winkelhalbierungseigenschaft der Tangenten an $\mathcal{P}$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}$, dass sich $\mathcal{P}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$ orthogonal schneiden. Skizzieren Sie mehrere solche konfokalen Parabeln.

(3+3 Punkte)