30 Sei f eine affine und bijektive Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $f(G(A,B)) = G(f(A), f(B))$ für alle A, $B \in \mathbb{R}^n$ mit $A \neq B$ gilt, d. h. dass f Geraden auf Geraden abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass f Paare paralleler Geraden auf Paare paralleler Geraden abbildet.

(c) Zeigen Sie, dass f Teilungsverhältnisse erhält, d.h., dass

$$\frac{f(A)f(B)}{f(C)f(D)} = \frac{AB}{CD}$$

für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n$ mit $A \neq B$, $C \neq D$ und $G(A,B)$ parallel zu $G(C,D)$ gilt.

(2+2+2 Punkte)

31 Seien $a, b > 0$ und $O = (0,0)$ der Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(O) = O$ (also eine lineare Abbildung), die die Ellipse $\mathcal{E}_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ in den Kreis

$$K(O,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

überführt.

(b) Benutzen Sie die Existenz der Abbildung f aus (a), um (ohne Rechnung!) die folgende Aussage zu beweisen: Sind AB und CD zwei verschiedene, zueinander parallele Sehnen von $\mathcal{E}_{a,b}$, und sind P bzw. Q die Mittelpunkte dieser beiden Sehnen, so verläuft die Gerade $G(P,Q)$ stets durch den Mittelpunkt O von $\mathcal{E}_{a,b}$.

(3+3 Punkte)

Freiwilliger Zusatz: Wie kann man mit Hilfe von (b) zu einer auf koordinatenfreiem Papier gegebenen Ellipse mit Hilfe von Zirkel und Lineal deren Mittelpunkt konstruieren?

32 Seien $A \in \mathbb{R}^n$ $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $k \neq 1$, und sei $D_{A,k}\colon P \mapsto A + k \cdot \overrightarrow{AP}$ die Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor k. Sei außerdem $T_u : P \mapsto P - u$ die Translation um den Vektor $u \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $T_u \circ D_{A,k} = D_{B,k}$ mit $B = A + \frac{1}{k-1}u$

(b) $D_{A,k} \circ T_u = D_{B',k}$ mit $B' = A + \frac{k}{k-1}u$

(3+3 Punkte)