33 Seien Punkte $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ und Zahlen („Massen“) $(m_1, \dots, m_k)$ gegeben. Der *Schwerpunkt* des Systems $(P_1, m_1), \dots, (P_k, m_k)$ ist definiert als der Punkt

$$S := \frac{1}{m_1 + \dots m_k}(m_1 P_1 + \dots + m_k P_k).$$

(a) Sei f eine affine Abbildung. Zeigen Sie, dass f den Punkt S auf den Schwerpunkt des Systems $(f(P_1), m_1), \dots, (f(P_k), m_k)$ abbildet. *(Hinweis: Schreiben Sie $f(u)$ als $f(u) = L(f)u + f(0)$).*

(b) Sei ein weiteres solches System $(Q_1, n_1), \dots, (Q_\ell, n_\ell)$ gegeben und T dessen Schwerpunkt. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Systems

$$(P_1, m_1), \dots, (P_k, m_k), (Q_1, n_1), \dots, (Q_\ell, n_\ell)$$

derselbe ist, wie der Schwerpunkt des Systems $(S, m_1 + \dots + m_k)$, $(T, n_1 + \dots n_\ell)$.

(3+3 Punkte)

34 Interpretieren Sie die Tatsache, dass sich die Seitenhalbierende in einem Dreieck in $\mathbb{R}^2$ stets im Verhältnis 2 : 1 schneiden als einen Spezialfall von Aufgabe 33 (b). *Hinweis: Betrachten Sie die drei Systeme $(A, 1), (B, 1)$ sowie $(C, 1)$ sowie $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$ und bilden Sie ihre Schwerpunkte.* *(6 Punkte)*

35 (a) Seien R und $\tilde{R}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zwei Drehungen, die in der Form $R = S_G \circ S_{G'}$ und $\tilde{R} = S_{G'} \circ S_{G''}$ mit geeigneten Geraden G, G' und G'' geschrieben werden können. Hierbei verlaufe G' durch die beiden Drehzentren von R und $\tilde{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Resultaten der Vorlesung, dass $R \circ \tilde{R}$ eine Drehung oder eine Translation ist.

(b) Seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte in $\mathbb{R}^2$, und α der gerichtete Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Ferner seien $G := G(A, B)$ und $G'(A, C)$. Sei $S_{G'}$ die Spiegelung an der Geraden G' und $R_{A,2\alpha}$ die Drehung um den Punkt A und den Winkel 2α. Zeigen Sie, dass $R_{A,2\alpha}(P) = S_{G'}(P)$ für alle $P \in G$ gilt.

(3+3 Punkte)