Angabe ohne Gewähr ☺ 1

Aufgabe E 1

(a) (i) $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$. Das Teilungsverhältnis $\frac{CD}{AB}$ ist definiert, falls $A \neq B$, $C \neq D$ und $G(A,B)$ parallel zu $G(C,D)$ ist [auch möglich, aber spezieller: A, B, C, D kollinear, $A \neq B$, $C \neq D$]

(ii) $G(A,B)$ parallel zu $G(C,D)$, $A \neq B$, also $\vec{AB} \neq 0$, $C \neq D$, also $\vec{CD} \neq 0$ und es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\vec{CD} = t\,\vec{AB}$.

$t = \frac{AB}{CD}$ ist das Teilungsverhältnis.

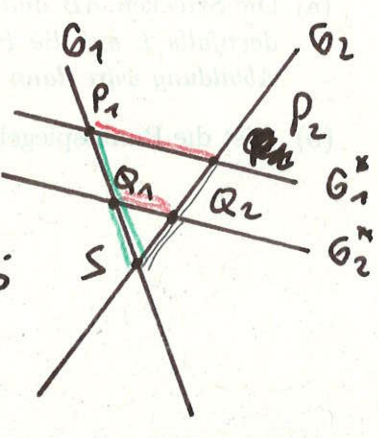
[Bem: Nicht:

- $\frac{CD}{AB} \neq \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}}$ ganz falsch!
- $\frac{CD}{AB} \neq \frac{|CD|}{|AB|}$ falsch, da $\frac{CD}{AB}$ auch negativ werden kann!
- $\left|\frac{CD}{AB}\right| = \frac{|CD|}{|AB|}$ richtig, aber keine Def. für $\frac{CD}{AB}$, da das Vorzeichen verloren geht!]

(b) Orientierte Strahlensätze:

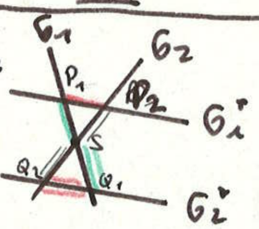
Seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ Geraden mit $G_1 \cap G_2 = \{S\}$. Seien G_1^*, G_2^* parallele Geraden, so dass $G_1 \cap G_1^* = \{P_1\}$, $G_2 \cap G_1^* = \{P_2\}$, $G_1 \cap G_2^* = \{Q_1\}$, $G_2 \cap G_2^* = \{Q_2\}$ mit $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \neq S$. Dann gilt

$$\frac{SP_1}{SQ_1} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} = \frac{SP_2}{SQ_2}$$



Skizze: [nicht verlangt ...]

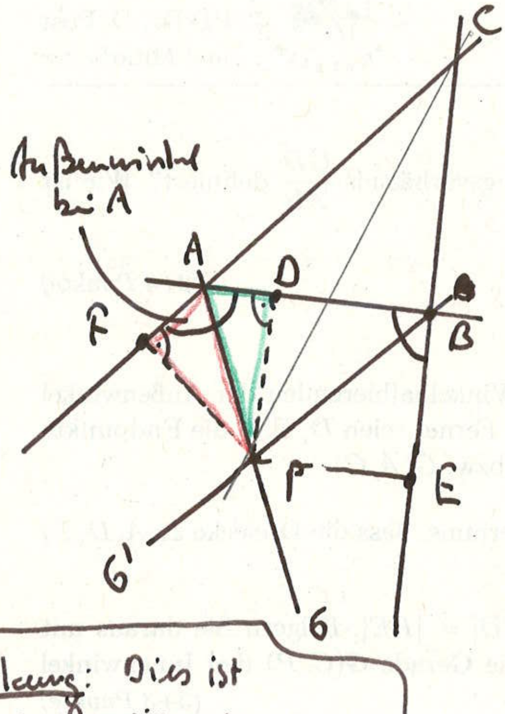
TV negativ:



Hier: Teilungsverhältnis positiv.

Aufgabe E2

Skizze:

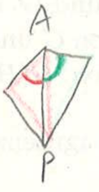


Bemerkung: Dies ist Teil des Beweises zum Inkreis in der Vorlesung. Ein Schluss mit diesem Satz der VL wäre hier ein Zirkelschluss …

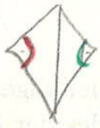
(a) Zeige: $\Delta(A,D,P)$, $\Delta(A,F,P)$ kongruent:

(i) Beide Dreiecke haben die Seite AP gemeinsam.

(ii) Die Winkel bei A, also $\sphericalangle(FAP)$ und $\sphericalangle(PAD)$ sind gleich, da $AP \subseteq G$ auf der Winkelhalbierenden liegt.



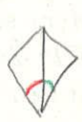
(iii) Die Winkel $\sphericalangle F$ und D sind beide $\frac{\pi}{2}$, da FP und DP Lote sind.



(Inkr.)

Nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke ~~ist~~ sind somit auch die Winkel in P gleich, also

$\sphericalangle(FPA) = \sphericalangle(APD)$.



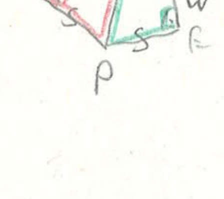
Damit sind die Voraussetzungen des Kongruenzsatzes WSW erfüllt und $\Delta(A,D,P)$, $\Delta(A,F,P)$ kongruent.

(b) Zeige: $\Delta(C,F,P)$, $\Delta(C,E,P)$ kongruent.

(i) Hinweis (folgt aus a)): ~~$|PD|$~~ $|PF| = |PD| = |PE|$

(ii) Seite PC ist gemeinsam

(iii) Winkel $\sphericalangle F$ ($\sphericalangle(PFC) = \frac{\pi}{2}$) und E ($\sphericalangle(PEC) = \frac{\pi}{2}$) sind rechte Winkel, da PE, PF Lote sind.

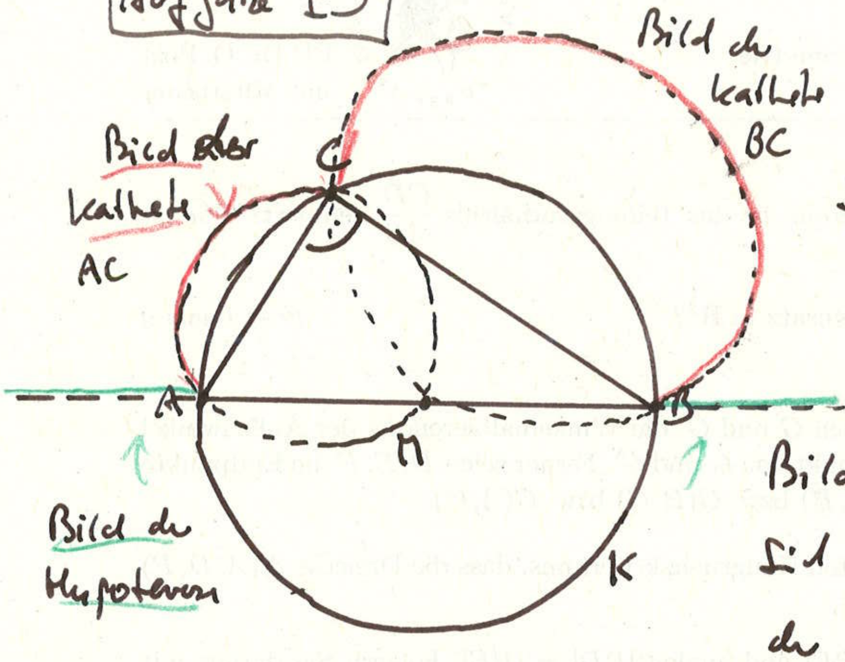


Ferner: $|PC|^2 = |FP|^2 + |FC|^2$ nach dem Satz von Pythagoras

also $|PC|^2 > |FP|^2$.

Somit sind die Vor. des Kongruenzsatzes SsW erfüllt und die Behauptung folgt ($G(P,C)$ Winkelhalbierende)

Aufgabe E3



Satz von Thales: Hypotenuse geht durch Mittelpunkt des Kreises K.

Bild der Hypothenuse AB ist sind die beiden Verlängerungen der Strecke AB, denn die Gerade G(A,B) verläuft durch M, und die Inversion lässt G(A,B) invariant.

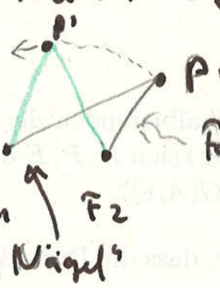
Die Bilder der Katheten AC und BC sind Kreise, denn die Geraden G(A,C) und G(B,C) verlaufen nicht durch M. Punkte auf dem Kreis bleiben invariant, also ist ~~das~~ ein Bild von AC ein Kreissegment (außerhalb von K) von A und C, analog für BC, der zugehörige Kreis verläuft jeweils durch M.

Aufgabe E4

(a) Sei F_1, F_2 die beiden Brennpunkte der Ellipse $\mathcal{E}$, und a die Länge der großen Halbachse.

Dann gilt: $|PF_1| + |PF_2| = 2a \iff P \in \mathcal{E}$

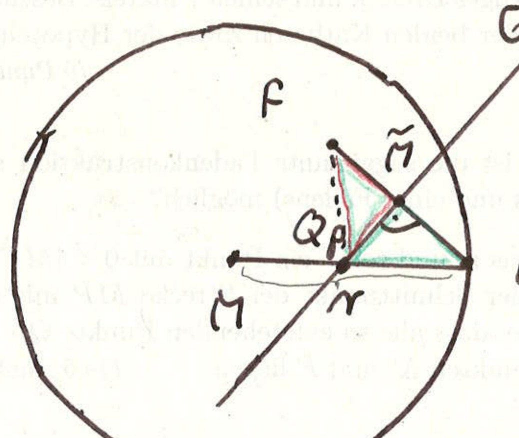
Skizze nicht nötig ☺



Auch möglich:

„Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, die zu zwei gegebenen Punkten feste gegebene Abstandssumme haben"

(b)



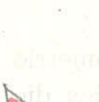
F liegt im Innern des Kreises und $F \neq M$.

Sei G Mittelsenkrechte zu FP und $\tilde{M}$ der Mittelpunkt von FP.

Die Dreiecke $\Delta(Q_P, P, \tilde{M})$ und $\Delta(Q_P, F, \tilde{M})$ sind kongruent, denn:

(i) Die Seite $\tilde{M}Q_P$ ist gemeinsame Seite

(ii) Der Winkel bei $\tilde{M}$ ist $\frac{\pi}{2}$ (G Mittelsenkrechte)



(iii) ~~Abstand~~ $|P\tilde{M}| = |\tilde{M}F|$, da $\tilde{M}$ Mittelpunkt von FP.

Nach dem Kongruenzsatz SWS folgt die Beh.

Insbesondere gilt

$$|MQ_P| + |FQ_P| \overset{\text{kongruent}}{=} |MQ_P| + |Q_P P| \overset{Q_P \in MP}{=} |MP| = r$$

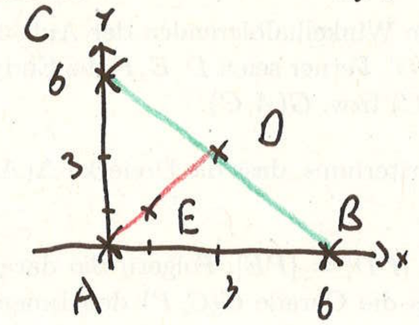
unab. von Q_P. Nach (a) liegt Q_P daher auf ~~der~~ der Ellipse mit Brennpunkten M und F und Halbachsenlänge $\frac{r}{2}$.

$\boxed{\text{Aufgabe E5}}$ (5)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affin, bijektiv

$A = (0,0)$, $B = (6,0)$, $C = (0,6)$, $D = (3,3)$, $E = (1,1)$

<u>Skizze</u> (nicht nötig, aber hilfreich!)



<u>In Worten:</u> D ist Mittelpunkt der Strecke BC;

(*) affine bijektive Abb. erhalten Mittelpunkte und Teilungsverhältnisse ⇒ ist D' der Mittelpunkt von B'C'.

E teilt AD im Verhältnis 1 : 2

liegt auf AD und

⇒ E' liegt auf A'D' und teilt diese Strecke ebenfalls im Verhältnis 1 : 2

oder <u>in Formeln:</u> $D = \frac{1}{2}(B+C) = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow D' = \frac{1}{2}(B'+C') = B' + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$

$E = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}D = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow E' = \frac{2}{3}A' + \frac{1}{3}D' = A' + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'D'}$

Begründung wie oben (*) oder:

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \underset{f\text{ aff.}}{\Rightarrow} \overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$ und $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \underset{f\text{ aff.}}{\Rightarrow} \overrightarrow{A'E'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'D'}$

$\boxed{\text{Aufgabe E6}}$

$A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier verschiedene Punkte,
AB, CD nicht parallel.
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Isometrie, $f(A) = \cancel{f(B)}\, B$
$f(B) = \cancel{f(A)}\, A$
$f(C) = D$
$f(D) = C$

Skizze: (nicht nötig, aber hilfreich)

a) f vertauscht Endpunkte der Strecke AB und erhält Teilungsverhältnisse: Mittelpunkt $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
also $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

f erhält $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{f(A)f(B)}}$

$\overrightarrow{B f(M)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (Vor.) $\Rightarrow f(M) = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$= A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$= M$

also bleibt Mittelpunkt erhalten. $\leadsto$ M Fixpunkt

Analog: M' Mittelpunkt von CD ist Fixpunkt.

Falls $M \neq M'$, ~~dann müssten alle Punkte A, B, C, D, M, M' kollinear sein, da sonst~~
dann fixiert f alle Punkte auf der Geraden $G(M, M')$ (ohne Begründung oder zB VL II.3.11(G?))
Klassifikationssatz ($f \neq id$ wg. $f(A) = B \neq A$) $\Rightarrow$
f Spiegelung an $G(M, M')$ $\Rightarrow$ AB, CD senkrecht zu $G(M, M')$, Widerspruch zu AB, CD nicht parallel.

b) f und $h_{M,-1}$ wirken gleich auf A, B, C, D, nicht kollinear $\Rightarrow f = h_{M,-1}$.
(VL)