E1

(a) Seien A, B, C, D Punkte in $\mathbb{R}^2$. *Wann* ist das Teilungsverhältnis $\dfrac{CD}{AB}$ definiert? *Wie* ist es dann definiert?

(b) Was besagt der orientierte Strahlensatz in $\mathbb{R}^2$? *(2+4 Punkte)*

E2

Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Seien G und G' die Winkelhalbierenden der Außenwinkel bei A bzw. B, und sei P der Schnittpunkt von G und G'. Ferner seien D, E, F die Endpunkte der Lote von P auf die Geraden $G(A, B)$ bzw. $G(B, C)$ bzw. $G(A, C)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Kongruenzkriteriums, dass die Dreiecke $\Delta(A, D, P)$ und $\Delta(A, F, P)$ kongruent sind.

(b) Wegen (a) wissen wir $|PD| = |PF|$ und analog $|PD| = |PE|$. Folgern Sie daraus mit Hilfe eines geeigneten Kongruenzkriteriums, dass die Gerade $G(C, P)$ den Innenwinkel bei C halbiert. *(3+3 Punkte)*

E3

Zeichnen Sie ein rechtwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck und seinen Umkreis. Beschreiben Sie in Worten und skizzieren Sie die Bilder der beiden Katheten sowie der Hypotenuse unter der Inversion am Umkreis. *(6 Punkte)*

E4

(a) Aufgrund welcher Eigenschaft von Ellipsen ist die sogenannte Fadenkonstruktion von Ellipsen (mit Hilfe zweier Nägel, eines Stiftes und eines Fadens) möglich?

(b) Sei $K(M, r) \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis um M mit Radius r, und sei F ein Punkt mit $0 < |MF| < r$. Für jeden Punkt $P \in K(M, r)$ sei Q_P der Schnittpunkt der Strecke MP mit der Mittelsenkrechten der Strecke FP. Zeigen Sie, dass alle so entstehenden Punkte Q_P auf einer (gemeinsamen) Ellipse mit den Brennpunkten M und F liegen. *(1+5 Punkte)*

E5

Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine bijektive affine Abbildung. Sei $A := (0, 0)$, $B := (6, 0)$, $C := (0, 6)$, $D := (3, 3)$ und $E := (1, 1)$, und seien A', B', C', D' und E' die Bildpunkte dieser Punkte unter f. Drücken Sie D' und E' durch A', B' und C' aus. (Geben Sie eine Beschreibung in Worten, oder geben Sie Formeln an). *(6 Punkte)*

E6

Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es eine Isometrie $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die A mit B vertauscht und C mit D vertauscht. Außerdem seien die Strecken AB und CD nicht parallel zueinander. Zeigen Sie:

(a) Die Strecken AB und CD haben denselben Mittelpunkt M. *(Hinweis: Wie würde andernfalls f auf die Punkte auf der Geraden durch die Mittelpunkte wirken? Welche Abbildung wäre dann f, und warum kann das nicht sein?*

(b) f ist die Punktspiegelung $D_{M,-1}$ an M. *(4+2 Punkte)*