Aufgabe 1 a)

Wir definieren $M(A,B,C) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0\}$. Sei $G = \{P + tV \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Die Aufgabe zerlegen wir in folgende Teilschritte:

- **1. Schritt:** Wir finden geeignete A, B, C (Vorüberlegung, “Nebenrechnung”)
- **2. Schritt:** Zu zeigen: $G = M(A,B,C)$, das heißt (eigentlicher Beweis)
- **2a:** Zu zeigen: $G \subset M(A,B,C)$.
- **2a:** Zu zeigen: $M(A,B,C) \subset G$.

Beweis. **Schritt 1:** Aufgrund der Anschauung wählen wir (A,B) als Normalenvektor zu G, also $\langle (A,B), v\rangle = 0$. Um zu sehen, wie wir dann C definieren müssen, berechnen wir für $(x,y) = P + tv$:

$$\begin{aligned}\langle (A,B), P + tv\rangle &= \langle (A,B), P\rangle + \langle (A,B), tv\rangle \\ &= \langle (A,B), P\rangle + 0.\end{aligned}$$

Daher setzen wir $C := -\langle (A,B), P\rangle$ gilt.

Schritt 2: Für diese im 1. Schritt definierten A, B, C zeigen wir jetzt, dass $G = M(A,B,C)$ gilt.

Schritt 2a: Sei $(x,y) \in G$, das heißt, $(x,y) = P + tv$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned}Ax + By + C &= \langle (A,B), P + tv\rangle + C \\ &= \langle (A,B), P\rangle + \langle (A,B), tv\rangle + C \\ &= -C + 0 + C = 0.\end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt: $(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in M(A,B,C)$ und somit $G \subset M(A,B,C)$.

Schritt 2b: Sei $(x,y) \in M(A,B,C)$, das heißt, $Ax + By + C = 0$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned}0 &= Ax + By + C \\ &= \langle (A,B), (x,y)\rangle + C \\ &= \langle (A,B), (x,y)\rangle - \langle (A,B), P\rangle \\ &= \langle (A,B), (x,y) - P\rangle.\end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass $(x,y) - P$ senkrecht zu (A,B) ist. Da aber (A,B) senkrecht zu v ist, und wir im $\mathbb{R}^2$ sind, müssen v und $(x,y) - P$ linear abhängig sein. Insbesondere gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda v = (x,y) - P$. Damit ist $(x,y) = P + \lambda v$, also insbesondere $(x,y) \in G$.

Damit haben wir gezeigt, dass für die Wahl von A, B, C wie in Schritt 1 gilt: $G \subset M(A,B,C)$ und $M(A,B,C) \subset G$, also $G = M(A,B,C)$. □