Aufgabe 20 b)   Blatt 7

Sei $C = \{(t\cos\varphi, t\sin\varphi, t\tan\beta) \mid \varphi\in[0,2\pi], t<0\}$

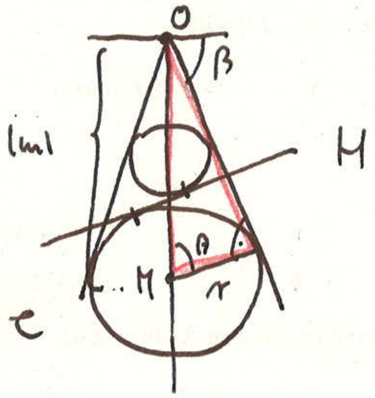
$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2)\tan^2\beta = z^2,\ z<0\}$ ← Halbkegel.

$H = \{X\in\mathbb{R}^3 \mid \langle X,n\rangle = d\}$, $n=(a,b,c)$, $c>\cos\beta$, $|n|=1$, $\underline{\underline{d<0}}$

(Fehler auf Aufgabenblatt...)

Zeige: Es gibt genau zwei Kugeln, die sowohl C als auch H tangential berühren.

(dabei berührt eine Kugel einen Kegel hier in einem Schnittkreis)



• Die Kugel K liegt symmetrisch in C, also

$M = (0,0,m)$, $m<0$.

• Die Kugel berührt H, also nach Teil a):

$$r \overset{!}{=} d(M,H) \overset{a)}{=} |\underbrace{\langle M,n\rangle}_{=m\cdot c} - d| = |mc-d| \quad (1)$$

• Die Kugel berührt C, also $\frac{r}{|m|} = \cos\beta$ (2) (rechtw. Dreieck)

(1)&(2): $|m|\cos\beta = r = |mc-d|$ (3)

$$\overset{()^2}{\Rightarrow} m^2\cos^2\beta = (mc-d)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2\cos^2\beta - (mc-d)^2}_{\substack{=(m\cos\beta-(mc-d))\cdot(m\cos\beta+mc-d) \\ \text{(Binom 3)}}} = 0$$

E: Produkt reeller Zahlen ist genau dann $=0$, falls einer ihrer Faktoren 0 ist:

$m\cos\beta-(mc-d)=0 \overset{\text{(oder)}}{\vee} (m\cos\beta+mc-d)=0$

also $m = \frac{-d}{\cos\beta - c}$ oder $m=\frac{d}{\cos\beta+c}$, d.h. $m_\pm = \frac{d}{\mp\cos\beta+c}$.

Nach Vor. gilt $-\cos\beta+c>0$ und $d<0$, also sind beide Lösungen für m negativ ($m_\pm<0$) ⇒ es gibt zwei solche Kugeln. □