1 (a) Was besagt der Sinussatz für Dreiecke?

(b) Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Wie üblich seien $b := |AC|$ und $c := |AB|$. Sei außerdem E der Mittelpunkt der Strecke BC und sei $\delta := \measuredangle(BAE)$ und $\varepsilon := \measuredangle(EAC)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{b}{c}$$

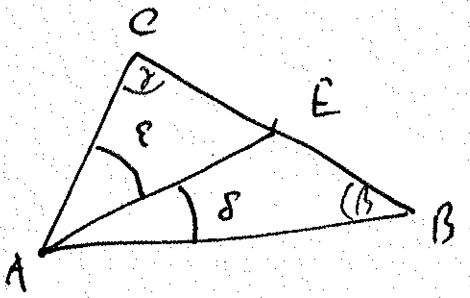
gilt. *(1+5 Punkte)*

Lösung von Aufgabe 1:

(a) Seien α, β, γ die Winkel gegenüber den Seiten a, b, c. Dann gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

(b) Skizze:



Seien β, γ die Innenwinkel bei B, C

Sei $a := |BC|$, dann gilt $|CE| = |EB| = \frac{a}{2}$ (E Mittelpunkt)

Sinussatz für $\Delta(A,B,E)$: $\frac{\sin\delta}{a/2} = \frac{\sin\beta}{|AE|}$ (1)

$\Delta(A,E,C)$: $\frac{\sin\varepsilon}{a/2} = \frac{\sin\gamma}{|AE|}$ (2)

$\Delta(A,B,C)$: $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b}$ (3)

Damit gilt: $$\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} \underset{(1),(2)}{=} \frac{\sin\beta \cdot \frac{a}{2} / |AE|}{\sin\gamma \cdot \frac{a}{2} / |AE|} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \overset{(3)}{=} \frac{b}{c}.$$

$\square$

2 Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Seien G und G' die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei B bzw. C, und sei P der Schnittpunkt von G und G'. Ferner seien D, E, F die Endpunkte der Lote von P auf die Geraden $G(A,B)$ bzw. $G(B,C)$ bzw. $G(A,C)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Kongruenzkriteriums, dass die Dreiecke $\Delta(B,P,D)$ und $\Delta(B,P,E)$ kongruent sind.

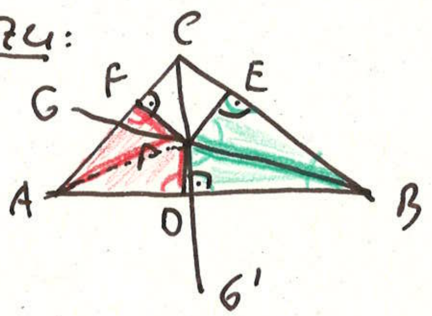
(b) Wegen (a) wissen wir $|PD| = |PE|$ und analog $|PE| = |PF|$. Folgern Sie daraus mit Hilfe eines geeigneten Kongruenzkriteriums, dass die Gerade $G(A,P)$ den Innenwinkel bei A halbiert. *(3+3 Punkte)*

Lösung von Aufgabe 2:

a) $\Delta(B,P,D)$, $\Delta(B,P,E)$ kongruent:

(i) Seite PB gemeinsam

Skizze:



(ii) Winkel bei D bzw. E ist Lot auf $G(A,B)$ bzw. $G(B,C)$, also $\frac{\pi}{2}$.

(iii) Winkel bei B: beide Dreiecke gleich, da Innenwinkel bei B von $\Delta(A,B,C)$ halbiert wird durch G.

(iv) Winkelsumme: Dreiecke $\Delta(B,P,D)$, $\Delta(B,P,E)$: Innenwinkel bei P sind gleich.

Nach dem Kongruenzsatz WSW folgt die Beh.

b) Zeige: $\Delta(A,P,D)$, $\Delta(A,P,F)$ kongruent:

(i) Seite AP gemeinsam

(ii) Winkel bei D, F ist $\frac{\pi}{2}$ (Lot; siehe oben)

(iii) $|PD| = |PE| = |PF|$ nach (a)

(iv) $|AP|^2 \underset{\text{Pythagoras}}{=} |PD|^2 + |AD|^2 > |PD|^2 \Rightarrow |AP| > |PD|$

Aus dem Kongruenzsatz SsW folgt die Beh. der Kongruenz.

Da die beiden Dreiecke kongruent sind, halbiert die Gerade $G(A,P)$ den Innenwinkel bei A.

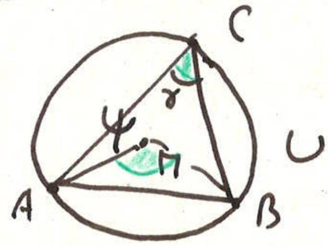
3 Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit $\gamma := \measuredangle(ACB) < \frac{\pi}{2}$.

(a) Sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\Delta(A,B,C)$. Bestimmen Sie den Winkel $\psi := \measuredangle(AMB)$.

(b) Sei U der Umkreis von $\Delta(A,B,C)$ und T die Tangente an U in A. Bestimmen Sie den Winkel $\delta < \frac{\pi}{2}$ zwischen T und der Geraden $G(A,B)$. *(2+4 Punkte)*

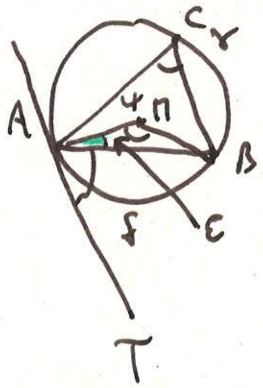
Lösung von Aufgabe 3:

(a) Schnittpunkt der MS ist Mittelpunkt des Umkreises U.



- $\psi = \measuredangle(AMB)$ ist <u>Mittelpunktswinkel</u> der Sehne AB im Kreis U.
- γ ist <u>Umfangswinkel</u> über der Sehne AB (auf derselben Seite wie M), also (Satz VL) $\underline{\underline{\psi = 2\gamma}}$

(b) $\Delta(A,B,M)$ ist gleichschenklig (zwei Seiten sind Radien von U).



Sei $\boxed{\varepsilon} := \measuredangle(BAM)$, Dreieck gleichschenklig, also $\measuredangle(ABM) = \varepsilon$; Winkelsumme in $\Delta(A,B,M)$: $\pi = \psi + 2\varepsilon = 2(\gamma+\varepsilon)$, somit $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

Die Tangente steht senkrecht auf AM, also $\delta + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$ und somit $\underline{\delta} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \gamma) = \underline{\underline{\gamma}}$

oder: $\boxed{\text{Sehnentangentenwinkelsatz}}$

(war aber nicht so gedacht... ☺)

4 Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit Mittelpunkt 0, Seitenlänge 2 und einer Ecke $E = \binom{1}{1}$. Sei K der Inkreis von Q (d.h. der Kreis, der die Seiten von Q jeweils in einem Punkt berührt). Sei S die Inversion an K.

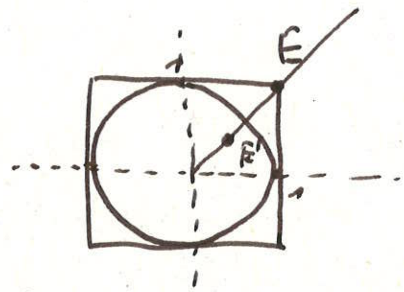
(a) Bestimmen Sie $S(E)$.

(b) Beschreiben Sie in Worten und skizzieren Sie das Bild der Seiten von Q unter S.

(2+4 Punkte)

Lösung von Aufgabe 4:

(a)



In Formel: Offensichtlich ist K der Einheitskreis $k(0,1)$.

$$S_{0,1}(P) = \frac{1}{|P|^2} P, \text{ somit } S_{0,1}(E) = \frac{1}{|(1,1)|^2}(1,1) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

geometrisch (alternativ)

$S_{0,1}(E) = E'$; E' liegt auf Halbgerade (Winkelhalb. im oberen, rechten Quadrant), also $E' = (x,x)$, $x > 0$.

Ferner gilt ~~$|E'|$~~ $|OE| \cdot |OE'| = r^2 = 1$, also

$|E'| = |OE'| = \frac{1}{|OE|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇝ $|E'| = \sqrt{2}\,x$ $(x>0)$,

somit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}|E'| = \frac{1}{2}$ ⇒ $E' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) • Die Seiten liegen auf Geraden nicht durch den Mittelpunkt $M = (0,0)$, also sind die Bilder der Geraden Kreise durch M.

• Punkte auf dem Kreis sind Fixpunkte

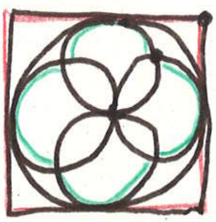
• entweder: Winkel bleiben erhalten (Seite berührt K, also berührt auch das Bild der Seite K)

oder: Bildpunkt von E bekannt, ebenso die anderen Bildpunkte der Ecken (Symmetrie)

Damit ist der Bildkreis eindeutig festgelegt.

Bild einer Seite ist Kreisbogen.

Skizze:

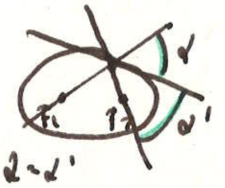


5 (a) Was besagt die Winkelhalbierungseigenschaft der Tangente an eine Ellipse?

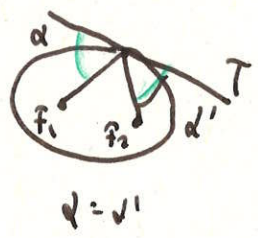
(b) Sei $\mathcal{E}$ eine Ellipse mit den Halbachsen $2a > 2b > 0$ und den Brennpunkten F_1 und F_2. Sei $P \in \mathcal{E}$ und T die Tangente an $\mathcal{E}$ in P. Zeigen Sie, dass der Bildpunkt von F_2 unter der Spiegelung an T auf dem Kreis $K(F_1, 2a)$ liegt. *(1+5 Punkte)*

Lösung von Aufgabe 5:

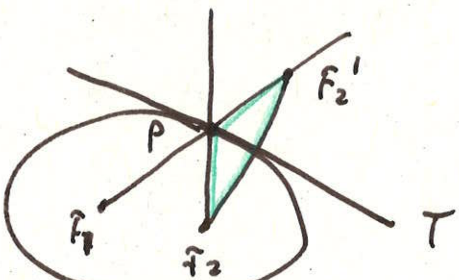
a) Die Tangente an eine Ellipse in P halbiert den Winkel der beiden Geraden durch P und den Brennpunkten.



oder: Ein Lichtstrahl von einem Brennpunkt an die Ellipse ~~in P~~ wird durch anderen Brennpunkt reflektiert. (Einfallswinkel = Ausfallswinkel)



b)



Sei F_2' der Bildpunkt von F_2 unter Spiegelung an T.

- Das Dreieck $\Delta(F_2, P, F_2')$ ist gleichschenklig (Kongruenzsatz oder T Senkrechte)
- Es gilt für Ellipsen: $|F_1 P| + |F_2 P| = 2a$, also $|F_1 P| + |P F_2'| = 2a$ (Dreieck gleichschenklig)
- Wegen der Winkelhalbierungseigenschaft liegt F_2' auf der Geraden $G(F_1, P)$, also gilt $|F_1 F_2'| = |F_1 P| + |P F_2'| = 2a$, also $F_2' \in K(F_1, 2a)$ $\square$

6 Im $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $A = (-1,1)$, $B = (0,1)$, $C = (0,2)$, $A' = (1,-1)$, $B' = (1,0)$, $C' = (2,0)$ gegeben.

(a) Wieviele Isometrien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$ gibt es?

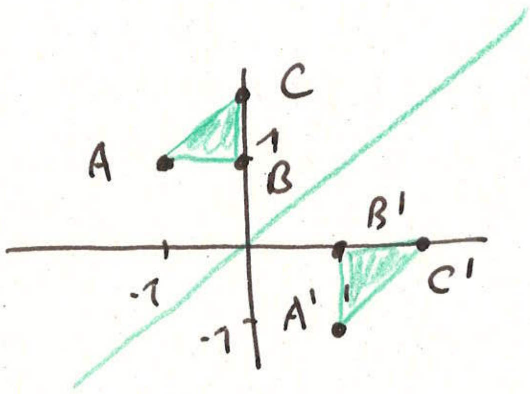
(b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte einer solchen Isometrie und beschreiben Sie, um welchen Typ von Isometrie es sich handelt.

(6 Punkte)

Lösung von Aufgabe 6:

6

Skizze:



(a) · Da A, B, C nicht kollinear sind, gibt es genau eine aff. Abb. mit den entsprechenden Bildpunkten. ~~Aff. A~~

· Isometrien sind affine Abb., also gibt es höchstens eine.

· Da $|f(A)f(B)| = |A'B'| = 1 = |AB|$ und
$|f(A)f(C)| = |A'C'| = \sqrt{2} = |AC|$ und
$|f(B)f(C)| = |B'C'| = 1 = |BC|$ gilt,
ist f tatsächlich eine Isometrie

$\Rightarrow$ es gibt also genau eine Isometrie.

(b) Aus Skizze ist erkennbar, dass A', B', C' die Bildpunkte unter Spiegelung S_G an der Winkelhalbierenden ~~Gerade~~ $G = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sind. Nach (a) gibt es genau eine Isometrie, also $f = S_G$. Die Fixpunkte liegen alle auf G, also $P \in G \Rightarrow f(P) = P$.