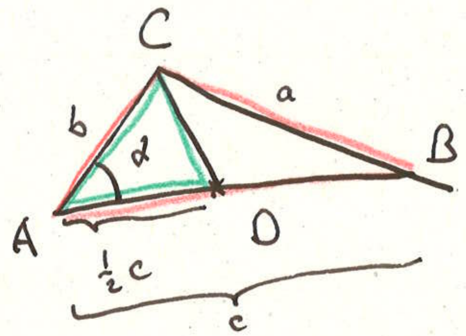
1 Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$. Wie üblich sei $a := |BC|$, $b := |AC|$, $c := |AB|$ und $\alpha := \measuredangle(BAC)$. Sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Drücken Sie $\cos\alpha$ auf zwei verschiedene Arten mit Hilfe des Cosinussatzes aus und folgern Sie: $|CD|^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$.

(6 Punkte)

Lösung von Aufgabe 1:

Skizze:



Cosinussatz im Dreieck $\Delta(A,B,C)$:

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad (1)$$

Cosinussatz im Dreieck $\Delta(A,D,C)$:

$$2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot b\cos\alpha = (\tfrac{1}{2}c)^2 + b^2 - |CD|^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow |CD|^2 \overset{(2)}{=} \tfrac{1}{4}c^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}(2bc\cos\alpha)$$

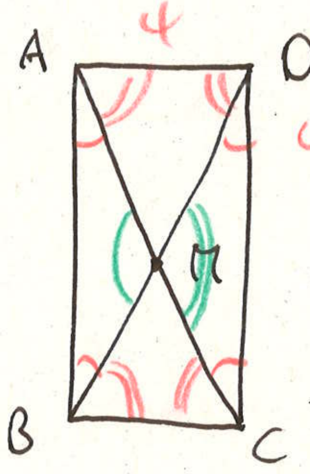
$$\overset{(1)}{=} \tfrac{1}{4}c^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= -\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2$$

2 Seien A, B, C, D die entgegen dem Uhrzeigersinn angeordneten Ecken eines Vierecks im $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie: Wenn die Diagonalen AC und BD gleichlang sind und sich gegenseitig halbieren, dann ist das Viereck ein Rechteck.

(6 Punkte)

Lösung von Aufgabe 2:



Skizze:

Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen.

Nach Voraussetzung gilt:

$|AC| = |BD|$ (1) und $|AM| = |CM|$ (2)
$|BM| = |DM|$

also auch (1) & (2): $|AM| = |CM| = |BM| = |DM|$

Scheitelwinkelsatz: $\sphericalangle(BMA) = \sphericalangle(CMD)$

und $|AM| = |DM|$, $|BM| = |CM|$

Kongruenzsatz $\Rightarrow$ SWS: $\Delta(A,B,M)$, $\Delta(C,D,M)$ kongruent,

Dreiecke sind gleichschenklig $\Rightarrow$

$\sphericalangle(MAB) = \sphericalangle(ABM) = \sphericalangle(MCD) = \sphericalangle(CDM) =: \varphi$

Analog: alle Winkel ψ gleich

Winkelsumme Viereck: $2\pi = 4(\varphi + \psi) \Rightarrow \varphi + \psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Beh.

3 (a) Seien A, B, C Punkte im $\mathbb{R}^2$. Wann ist das Teilungsverhältnis $\frac{AC}{AB}$ definiert, und wie ist es dann definiert?

(b) In dem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ im $\mathbb{R}^2$ seien $P \in AB$ und $Q \in AC$ gegeben, so dass

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = r \quad \text{mit} \quad 0 < r < 1.$$

Sei M der Schnittpunkt von PC mit QB. Folgern Sie mit der Umkehrung des orientierten Strahlensatzes, dass $G(P, Q)$ parallel ist zu $G(P, C)$ und zeigen Sie

B   oh je...

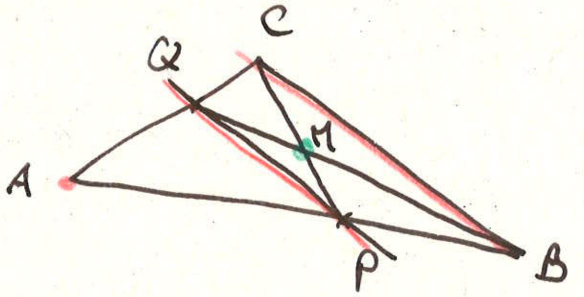
$$\frac{PC}{PM} = 1 + \frac{1}{r}.$$

(1+5 Punkte)

Lösung von Aufgabe 3:

(a) $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Das Teilungsverhältnis ist definiert, falls es eine Gerade G mit $A, B, C \in G$ gibt. Dann ist $\frac{AC}{AB} =: t$ die reelle Zahl, für die $\vec{AC} = t\,\vec{AB}$ gilt (oder: $\vec{AC} = \frac{AC}{AB}\vec{AB}$)

(b)



- Umkehrung des or. Strahlensatzes: (mit A als Schnittpunkt) $G(P, Q) \parallel G(B, C)$, Strahlensatz: $r = \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} \overset{!}{=} \frac{PQ}{BC}$ (0)
- Für die Teilungsverhältnisse gilt

$$\frac{PC}{PM} = \frac{PM}{PM} + \frac{MC}{PM} = 1 - \frac{MC}{MP} \quad (1)$$

- or. Strahlensatz (M als Schnittpunkt):

$$\frac{MC}{MP} = \frac{CB}{PQ} \quad (2)$$

Rechenregel TV

also:
$$\frac{PC}{PM} \overset{(1)}{=} 1 - \frac{MC}{MP} \overset{(2)}{=} 1 - \frac{CB}{PQ} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{PQ}{CB}\right)} \overset{(0)}{=} 1 + \frac{1}{r} \quad \square$$

4 (a) Wie lautet der Sehnensatz?

(b) Sei $\Delta = \Delta(A, B, C)$ ein gleichseitiges Dreieck. Seien P, Q die Mittelpunkte von BC bzw. AC. Seien S, T die Schnittpunkte von $G(P, Q)$ mit dem Umkreis von Δ, wobei S näher an Q und T näher an P liege. Beweisen Sie, dass der Punkt P die Strecke QT im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt, d. h. $|QP| : |QT| = |PT| : |QP|$.

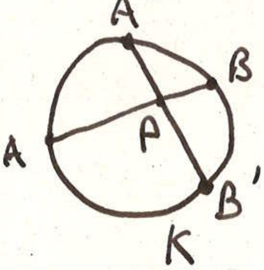
(*Hinweis:* Aus Symmetriegründen gilt $|PS| = |QT|$, das brauchen Sie nicht zu beweisen.)

(1+5 Punkte)

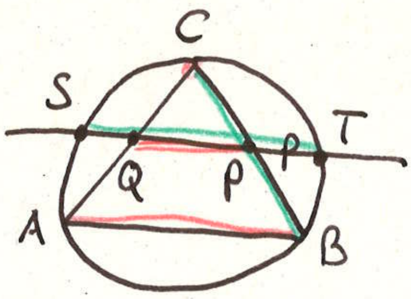
Lösung von Aufgabe 4:

(a) Sehnensatz: Seien A, B, A', B' Punkte eines Kreises K mit $A \neq B$, $A' \neq B'$, ~~die~~ so dass sich die Sehnen (Strecke) AB und $A'B'$ innerhalb des Kreises im Pkt P schneiden. Dann gilt

$|AP| \cdot |BP| = |A'P|\,|B'P|$



(b)



Nach dem Sehnensatz gilt (für die Sehnen ST und BC mit Schnittpunkt P):

$$|PS| \cdot |PT| = |PB| \cdot |PC|$$

$$= \tfrac{1}{2}|AB| \cdot \tfrac{1}{2}|AB| \quad (1)$$

(P halbiert Strecke BC) Dreieck gleichseitig)

Nach dem Strahlensatz gilt ($G(A,B) \parallel G(P,Q)$)

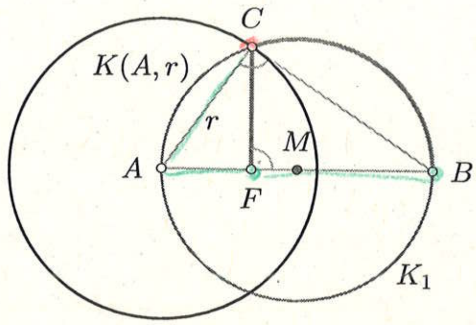
$$\frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|CB|} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(P Mittelpunkt von BC)

also $|PS| \cdot |PT| \overset{(1)}{=} \left(\tfrac{1}{2}|AB|\right)^2 \overset{(2)}{=} |PQ|^2 \Rightarrow \dfrac{|QP|}{|QT|} \overset{\text{Tipp}}{=} \dfrac{|PQ|}{|PS|} = \dfrac{|PT|}{|PQ|}$

5 Sei $r > 0$. Gegeben seien Punkte A und $M \notin K(A,r)$ so dass $|AM| < r$. Seien $K_1 = K(M, |AM|)$ und $C \in K_1 \cap K(A,r)$.
Seien B, $B \neq A$ der zweite Punkt in $G(A,M) \cap K_1$ und F der Fußpunkt des Lotes von C auf AB.

Zeigen Sie, dass die Strecke CF durch die Inversion S am Kreis $K(A,r)$ auf den Kreisbogen $\widehat{CB} \subset K_1$ abgebildet wird (siehe Skizze).



(6 Punkte)

Lösung von Aufgabe 5:

(1) $\boxed{C \in K_1}$, also gilt $S(C) = C$

(2) Es gilt $\boxed{S(F) = B}$, denn:

$|AF| \cdot |AB| = r^2$ (Kathetensatz für rechtwinkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$)

und $F \in S_+(A,B)$ nach Konstruktion ($F \in AB$)

Der Bildpunkt B bei der Inversion am Kreis ist somit festgelegt.

(3) Die Gerade $G(C,F)$ wird unter Inversion an $K(A,r)$ auf einen Kreis durch A abgebildet (ohne A), denn $A \notin G(C,F)$. Der Kreis ist durch $S(C) = C$ und, $S(F) = B$ und A festgelegt (K_1 in Skizze)

Die Strecke CF wird also auf den Kreisbogen $\widehat{CB} \subseteq K_1$ abgebildet. $\square$

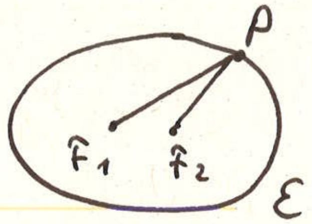
6 Sei $\mathcal{E}$ eine Ellipse mit den halben Hauptachsen $a > b > 0$ und den Brennpunkten F_1, F_2.

(a) Geben Sie eine geometrische Charakterisierung der Ellipse mit Hilfe von a, F_1 und F_2 an.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Ähnlichkeitstransformation. Warum ist $f(\mathcal{E})$ wieder eine Ellipse?

(2+4 Punkte)

Lösung von Aufgabe 6:



(a)

Sei $\mathcal{E}$ die Ellipse. Dann gilt („Fadenkonstruktion")

$\mathcal{E} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid |PF_1| + |PF_2| = 2a \}$

(b) Eine Ähnlichkeitstransformation f ist eine Verknüpfung von einer Isometrie und einer Streckung. Sei ~~$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$~~ $k > 0$ der Streckfaktor, dann gilt

$|f(P)f(Q)| = k|PQ|$ für alle $P, Q \in \mathbb{R}^2$

Sei $P' \in f(\mathcal{E})$, dann gilt

$|P'f(F_1)| + |P'f(F_2)| \overset{(a)}{=} k \cdot 2a.$

Also liegt P' auf der Ellipse mit (längeren) halben ~~Halb~~ Hauptachse ~~Länge~~ $k \cdot a$ und den Brennpunkten $f(P_1)$, $f(P_2)$.

Ellipsen aber nur durch Länge bestimmt. $\Rightarrow$ Beh.

oder kurz: Ähnlichkeitstransformationen ändern alle Längen um einen konst. Faktor, nach a) sind