Aufgabe 1. Exemplarisch wird hier nur die Lösung von a) vorgeführt.
a) Zu zeigen:$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Beweis:

$$
\begin{aligned}
& (A \cup B) \cap C \\
= \; & (\{x \in X | x \in A\} \cup \{x \in X \mid x \in B\}) \cap \{x \in X \mid x \in C\} \\
= \; & \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\} \cap \{x \in X \mid x \in C\} \\
= \; & \{x \in X \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C\} \\
= \; & \{x \in X \mid (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\
= \; & \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in C\} \cup \{x \in X \mid x \in B \wedge x \in C\} \\
= \; & (\{x \in X \mid x \in A\} \cap \{x \in X \mid x \in C\}) \cup \\
& (\{x \in X \mid x \in B\} \cap \{x \in X \mid x \in C\} \\
= \; & (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde von Zeile zu Zeile wie folgt vorgegangen: Von Zeile 1 auf Zeile 2 wurde die Definition einer Teilmenge angewendet. Von 2 auf 3 die Definition der Vereinigung, von 3 auf 4 die des Durchschnittes. Von Zeile 4 auf 5 wurde die logische Äquivalenz genutzt, die im Anschluss bewiesen wird. Von Zeile 5 auf 6 wurde erneut die Definition der Vereinigung und von Zeile 6 auf 7 die Definition des Durchschnitts benutzt. Somit bleibt noch zu zeigen, dass für Aussagen P, Q, S die logische Äquvalenz $(P \vee Q) \wedge S \Leftrightarrow (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)$ gilt. Dies zeigt man leicht durch das Aufschreiben der entsprechenden Wahrheitstabelle. (Die in der Lösung natürlich vorhanden sein sollte!)

Aufgabe 2. Zeigen Sie dass $R = \{\big((x,y), x+y\big) : x \in X, \, y \in Y\}$ der Graph einer bijektiven Abbildung von A nach B ist.
Beweis: Zu Zeigen: Die Abbildung $f : A \to B, \; (x,y) \mapsto x+y$ ist bijektiv. Da R der Graf von f ist, reicht es, diese Behauptung zu zeigen.
Um zu zeigen, dass f bijektiv ist, muss gezeigt werden, dass f injektiv und surjektiv ist.
a) Zu zeigen: f ist surfektiv.
Beweis: Per Definition ist $B = \{x+y : x \in X, \, y \in Y\}$. Daher ist Surjetivität trivial.
b) Zu zeigen: f ist injektiv. Das heißt es ist zu zeigen, falls $f((x,y)) = f((w,z))$ dann gilt $(x,y) = (w,z)$. Dies zeigt man leicht durch die Auflistung aller möglichen Summen und dadurch, dass man dann erkennt, dass keine zwei Summen den gleichen Wert annehmen.

Aufgabe 3.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(A\cap B) &= \{x\in X : f(x)\in A\cap B\} \\ &= \{x\in X :\ f(x)\in A \wedge f(x)\in B\} \\ &= \{x\in X :\ f(x)\in A\}\cap\{x\in X :\ f(x)\in B\} \\ &= f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f^{-1}(A\cup B) &= \{x\in X : f(x)\in A\cup B\} \\ &= \{x\in X :\ f(x)\in A \vee f(x)\in B\} \\ &= \{x\in X :\ f(x)\in A\}\cup\{x\in X :\ f(x)\in B\} \\ &= f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

(b) Sei $y\in f(A\cap B)$, dann gibt es ein $x\in A\cap B$ mit $f(x)=y$. Aus $x\in A$ folgt $y=f(x)\in f(A)$, und aus $x\in B$ folgt $y=f(x)\in f(B)$, also gilt $y\in f(A)\cap f(B)$.

Ein mögliches Beispiel für $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$. Nehme $X=Y=\{1,2,3\}$, $f(1)=1$, $f(2)=f(3)=2$. Betrachte $A=\{1,2\}$ und $B=\{1,3\}$. Es gilt $A\cap B=\{1\}$ und $f(A\cap B)=\{1\}$ aber $f(A)=f(B)=f(A)\cap f(B)=\{1,2\}$.

(c) 1. Immer richtig. Sei $x\in A$, dann gilt natürlich $f(x)\in f(A)$, was nach der Definition des Urlbildes auch $x\in f^{-1}(f(A))$ impliziert.

2. Im allgemeinen falsch. Man nehme beispielsweise $X=\{1,2\}$, $Y=\{1\}$, $f(1)=f(2)=1$. Für $A=\{1\}$ gilt $f(A)=\{1\}$ und $f^{-1}(f(A))=\{1,2\}$.

Für surjektive f ist die Aussage ebenfalls im allgemeinen falsch, wie das obige Beispiel zeigt.

Ist f injektiv (insbesondere, bijektiv), so gilt diese Inklusion, was dann auch $A=f^{-1}(f(A))$ ergibt. Die Inklusion $A\subset f^{-1}(f(A))$ ist schon unter 1. bewiesen. Nehme an, es gibt $A\subset X$ und $x\in f^{-1}(f(A))$ mit $x\notin A$. Sei $y:=f(x)$; es gilt also $y\in f(A)$. Nach der Definition von $f(A)$ gibt es ein $x'\in A$ mit $y=f(x')$, also $f(x)=f(x')$. Da $x\notin A$ und $x\in A$, gilt $x\neq x'$, was der Injektivität von f widerspricht.

3. und 4. sind beide immer richtig. Es gilt

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &= \{y\in Y : \exists x\in f^{-1}(B) \text{ mit } y=f(x)\} \\ &= \{y :\in Y : \exists x\in X : (\exists b\in B \text{ mit } f(x)=b) \text{ mit } y=f(x)\} \\ &= \{y :\in Y : \exists b\in B \text{ mit } y=b\} \\ &= B. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.

1. Seien $g_1, g_2 \in G$. Es ist zu zeigen, dass die Abbildung $g_1 \circ g_2$ bijektiv ist.

Surjektivität von $g_1 \circ g_2$. Sei $x \in X$. Da g_1 surjektiv ist, gibt es $x' \in X$ mit $g_1(x') = x$. Da g_2 auch surjektiv ist, gibt es $x'' \in X$ mit $g_2(x'') = x'$. Es gilt dann $(g_1 \circ g_2)(x'') = g_1(g_2(x'')) = x$.

Injektivität von $g_1 \circ g_2$. Seien $x, x' \in X$ mit $(g_1 \circ g_2)(x) = (g_1 \circ g_2)(x')$. Das bedeutet $g_1(g_2(x)) = g_1(g_2(x'))$. Aus der Injektivität von g_1 folgt $g_2(x) = g_2(x')$, und die Injektivität von g_2 impliziert $x = x'$.

2. Zu jedem $x \in X$ gilt $(g_1 \circ g_2) \circ g_3(x) = g_1 \circ g_2(g_3(x)) = g_1(g_2(g_3(x))) = g_1(g_2 \circ g_3(x)) = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)(x)$.

3. Sei e die Identitätsabbildung, d.h. $e(x) = x$ zu jedem $x \in X$. Zu jedem $g \in G$ und $x \in X$ gilt $e \circ g(x) = e(g(x)) = g(x)$ und $g \circ e(x) = g(e(x)) = g(x)$.

Sei $e' \in G$ mit $g \circ e' = e' \circ g = g$ zu jedem $g \in G$. Es gilt dann $e' \circ e(x) = e'(x) = e(x)$ zu jedem $x \in X$, also $e' = e$.

4. Sei $g \in G$. Betrachte die inverse Abbildung g^{-1}, die wegen der Bijektivität von g wohldefiniert ist. Es gilt $g^{-1}(x) = y$ genau dann, wenn $y = g(x)$, d.h. $g(g^{-1}(x)) = x$ zu jedem $x \in X$ (was $g \circ g^{-1} = e$ ergibt) und $g^{-1}(g(x)) = x$ zu jedem $x \in X$ (was $g^{-1} \circ g = e$ ergibt).

Nehmen wir an, dass ein $g' \in G$ mit $g \circ g' = g' \circ g = e$ existiert. Zu jedem $x \in X$ gilt also $g(g'(x)) = x$ und $g'(g(x)) = x$. Es gilt also $g'(x) = y$ genau dann, wenn $y = g(x)$, d.h. g' ist die inverse Abbildung g^{-1}.