Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $a \in G$, Z_a die von a erzeugte zyklische Gruppe. Betrachte die linken Nebenklassen bZ_a, $b \in G$. Zu jedem $b \in G$ gilt $|bZ_a| = |Z_a|$. Da für zwei Elemente $b, b' \in G$ entweder $bZ_a = b'Z_a$ oder $bZ_a \cap b'Z_a = \emptyset$ gilt und $\bigcup_{b \in G} bZ_a = G$, gilt $n|Z_a| = |G|$, wobei n die Anzahl der linken Nebenklassen ist.

Aufgabe 4.

(a) Es ist zu zeigen, dass für beliebige $\sigma_1, \sigma_2 \in H$ gilt $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \in H$.

Zu jedem $\sigma \in H$ gilt $\sigma(n) = n$ und $\sigma^{-1}(n) = n$. Also $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1}(n) = \sigma_1(\sigma_2^{-1}(n)) = \sigma_1(n) = n$, und $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \in H$.

(b) Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ mit $\sigma_1 H = \sigma_2 H$. Dies ist äquivalent zu $\sigma_1\sigma_2^{-1} \in H$ oder zu $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1}(n) = n$ oder zu $\sigma_1^{-1}(n) = \sigma_2^{-1}(n)$. Deswegen sieht jede linke Nebenklasse so aus: $\{\sigma \in S_n : \sigma(k) = n\}$, wobei $k \in \{1, \dots, n\}$ fest steht.

Auf dieselbe Weise beschreibt man die rechten Nebenklassen: $\{\sigma \in S_n : \sigma(n) = k\}$, wobei $k \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Die Zerlegungen von S_n in die linken und die rechten Nebenklassen stimmen nur für $n = 1$ und $n = 2$ überein.

Aufgabe 5.

(a) Die alternierende Gruppe A_4 besitzt 12 Elemente, die Gruppe S_4 besteht aus 24 Elementen. Deswegen sehen die linken und die rechten Nebenklassen von S_4 bzgl. A_4 gleich aus: Es gibt in den beiden Fällen nur zwei Nebenklassen, A_4 selbst und den Rest $S_4 \setminus A_4$, also ist A_4 Normalteiler.

(b) Durch direktes Berechnen der linken und rechten Nebenklassen bekommt man dieselbe Zerlegung von S_4:

$$
\begin{aligned}
S_4 = &\{(1234), (2143), (3412), (4321)\} \\
&\cup\{(1243), (2143), (4312), (3421)\} \\
&\cup\{(1324), (3142), (2413), (4231)\} \\
&\cup\{(1342), (3124), (4213), (2431)\} \\
&\cup\{(1423), (4132), (2314), (3141)\} \\
&\cup\{(1432), (4123), (3214), (2341)\}.
\end{aligned}
$$