Musterlösung zu Blatt 4

Aufgabe 3.

(a) Wir wollen hier einen Widerspruchbeweis führen und nehmen daher an, dass es eine injektive Abbildung von X nach Y gibt. Sei also $i : X \to Y$ injektiv. X ist unendlich, also haben wir eine bijektive Abbildung $b : X' \to X$, wobei X' eine echte Teilmenge von X ist. Nun betrachen wir die Mengen $i(X'), i(X) \subset Y$ und eine Abbildung $i \circ b \circ i^{-1} : i(X') \to i(X)$. Dann ist $i \circ b \circ i^{-1}$ bijektiv, weil b bijektiv und i injektiv ist. Ausserdem ist $i(X')$ eine echte Teilmenge von $i(X)$, die endlich ist, denn Y ist endlich. Also haben wir einen Widerspruch zu der Definition einer endlichen Menge.

(b) Sei X unendlich. Zu zeigen: $\exists f : \mathbb{N} \to X$ injektiv. Wir definieren eine Funktion f wie folgt.

Da X unendlich ist, gibt es ein $X_1 \subset X$ sodass $\exists x_1 \in X \setminus X_1$ und es gibt eine Bijektion zwischen X und X_1. Definiere $f(1) := x_1$.

Entsprechend definiere $f(n)$ induktiv: Da X_{n-1} unendlich ist, gibt es ein $X_n \subset X_{n-1}$ sodass $\exists x_n \in X_{n-1} \setminus X_n$ und es gibt eine Bijektion zwischen X_{n-1} und X_n. Definiere $f(n) := x_n$.

Die auf diese Weise induktiv definierte Abbildung f ist offenbar injektiv, weil jedes $x_n \in X_{n-1} \setminus X_n$ und damit $x_n \notin X_m$ für alle $m \geq n$.