Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

ÜBUNGSBLATT 4

Vorlesung Analysis I*, WS 2007/08

Abgabe am 21.11.2007 vor der Vorlesung (um 13 Uhr)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis1.html

Aufgabe 1. In der Vorlesung wurde die Abbildung $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n, m) \mapsto n + m$ definiert. Definieren Sie analog zur Addition die Multiplikation und zeigen Sie die Kommutativität, Assoziativität, sowie das Distributionsgesetz.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Eine Paarvertauschung ist eine Permutation, bei der genau 2 Elemente vertausch werden, während die restlichen Elemente unverändert bleiben. Eine Permutation heisst gerade, wenn sie durch eine gerade Anzahl an Paarvertauschungen beschrieben werden kann.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller geraden Permutationen eine Untergruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung einer geraden und einer ungeraden Permutation eine ungerade Permutation ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Wir nennen eine Menge X *unendlich*, wenn es eine Untermenge $X' \subset X$ gibt mit $X \neq X'$, für die eine Bijektion zwischen X und X' existiert. Eine Menge, die nicht unendlich ist, heißt *endlich.*

(a) Sei X eine unendliche Menge, Y eine nichtleere endliche Menge. Unter Verwendung der obigen Definition zeigen Sie, dass es keine injektive Abbildung von X nach Y gibt.

(b) Sei X eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X existiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Definiere eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $f(1) = f(2) = 1$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, $n = 3, 4, \ldots$. (Die $f(n)$ werden Fibonacci-Zahlen genannt.) Zeigen Sie folgende Relationen:

(a) $f(n+2) = f(1) + \cdots + f(n) + 1$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $f(n+2)f(n) - f(n+1)^2 = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) $f(n) = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

- $3 \in M$ und
- ist $m \in M$, so auch $2m - 1 \in M$ und $2m + 1 \in M$.

Zeige, dass M alle ungeraden Zahlen enthält, die grosser als 1 sind.

(4 Punkte)