Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

ÜBUNGSBLATT 5

Vorlesung Analysis I*, WS 2007/08

Abgabe am 28.11.2007 vor der Vorlesung (um 13 Uhr)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis1.html

Aufgabe 1. Wir nennen eine Menge X *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass X isomorph zu $\{1, \dots, n\}$ ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt *unendlich.* Zeigen Sie:

(a) Die Vereinigung und der Durchschnitt endlicher Mengen ist endlich.

(b) Diese Definition ist äquivalent zu der Definition in Aufgabe 3 auf Übungsblatt 4.

(c) Sind X und Y unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$, so gibt es eine Bijektion zwischen X und Y.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. Seien M und N Mengen. Man zeige:

(a) Ist N unendlich und gibt es eine surjektive Abbildung von M nach N, so ist auch M unendlich.

(b) Sei M unendlich, N endlich, f eine Abbildung von M nach N, dann existiert so ein $n \in N$, dass $f^{-1}(n)$ eine unendliche Menge ist. (Dies nennt man auch das Schubladenprinzip von Dirichlet.)

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ setze $F_m := 2^{2^m} + 1$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt $F_m - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot \cdots \cdot F_{m-1}$.

(b) Die Zahlen F_m sind paarweise teilerfremd.

(c) Die Menge der Primzahlen ist unendlich.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass der ggT (größter gemeinsamer Teiler) von zwei beliebigen natürlichen Zahlen wohldefiniert ist, d.h. zwei beliebige natürliche Zahlen haben einen ggT, der eindeutig bestimmt ist. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem man den ggT von zwei natürlichen Zahlen berechnen kann.

(4 Punkte)