Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

ÜBUNGSBLATT 7

Vorlesung Analysis I*, WS 2007/08

Abgabe am 12.12.2007 vor der Vorlesung (um 13 Uhr)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis1.html

Aufgabe 1. Seien A, B beschränkte Mengen positiver Zahlen. Wir definieren $A \cdot B := \{a \cdot b :\ a \in A, b \in B\}$, $A + B := \{a + b :\ a \in A, b \in B\}$, $A - B := \{a - b :\ a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

(a) $\inf A \cdot B = \inf A \cdot \inf B$.

(b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(c) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n^2}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{a}{(aj+b)(aj+a+b)}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{120000\, n^2}{n^4 + 1}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Folge, mit $x_n \neq 0$ für alle n. Sei $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Man betrachte eine neue Folge (y_n) mit $y_n := \dfrac{x_n}{x_{n+1}}$.

(a) Zeigen Sie: Gilt $a \neq 0$, so ist (y_n) konvergent, und $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$.

(b) Finden Sie eine Folge x_n, für die (y_n) konvergent ist, aber $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 1$.

(c) Finden Sie eine Folge x_n, für die (y_n) nicht konvergent ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) konvergent ist für:

(a) $x_n = \prod_{j=1}^{n}(1 - \frac{1}{n})$.

(b) $x_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$.

(c) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \geq 1$.

(4 Punkte)