Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

ÜBUNGSBLATT 9

Vorlesung Analysis I*, WS 2007/08

Abgabe am 09.01.2008 vor der Vorlesung (um 13 Uhr)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis1.html

Aufgabe 1. Prüfen Sie mit Hilfe des Majoranten- oder Quotientenkriteriums, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent ist. [Mit Beweis!]

(a) $x_n = \dfrac{n}{n^3+1}$,

(b) $x_n = \dfrac{3}{2^n+n}$,

(c) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , n = k^2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n^2} & , sonst \end{cases}$

(d) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$

(e) $x_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.

(a) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen, die nicht konvergent sind. Was kann man über die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sagen, wenn

  (i) $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle n?

  (ii) $a_n, b_n \geq 0$, $c_n = \max(a_n, b_n)$?

  (iii) $a_n, b_n \geq 0$, $c_n = \min(a_n, b_n)$?

(b) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle n. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ auch konvergent ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3.

(a) Sei a_n eine monoton fallende (reelle) Nullfolge und sei b_n sei eine andere (komplexe) Folge mit der Eigenschaft: Es existiert $C > 0$ mit $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert. [Hinweis: Nutzen Sie das Cauchykriterium.)

(b) Finden Sie mit Hilfe von (a) alle komplexen Zahlen z mit $|z| = 1$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass dies alle gesuchten Zahlen sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine konvergente Reihe mit $x_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ auch konvergent ist.

(b) Finden Sie eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit $x_n \geq 0$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konvergent ist. [Mit Beweis!]

(c) Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konvergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ konvergent.

(5 Punkte)

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass für alle komplexen Zahlen z, w gilt:

(a) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

(b) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(c) Die komplexe Conjugation cg ist ein Körperisomorphismus, also $cg(z + w) = cg(z) + cg(w)$ und $cg(z \cdot w) = cg(z) \cdot cg(w)$.

(d) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(5 Punkte)