Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning

ÜBUNGSBLATT 12

Vorlesung Analysis I*, WS 2007/08

Abgabe am 30.01.2008 vor der Vorlesung (um 13 Uhr)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis1.html

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ gilt:

(a) $e^t \geq 1 + t$,

(b) $t \geq 1 - e^{-t}$,

(2 Punkte)

Aufgabe 2.

(a) Sei $s := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, wobei a_n eine monoton fallende Nullfolge ist. Zeigen Sie, dass für $s_k := \sum_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$ gilt: $|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$

(b) Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ gilt $\sin t \leq t$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius für folgende Reihen und finden Sie (mit Beweis) alle komplexen Zahlen z, für die die Reihen konvergent sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$, $k \geq 1$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{3^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

Hinweis: Am Rande des Konvergenzkreises könnte Aufgabe 3 vom Blatt 9 nutzlich sein.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. Finden Sie (mit Beweis) alle reellen Zahlen z, für die folgende Reihen konvergent sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nz}{n}$.

Hinweis: Vgl. Aufgabe 3 vom Blatt 9 und Aufgabe 5 vom Blatt 11.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Unter Benutzung der bekannten Potenzreihen und Differenzierung berechnen Sie die Summen folgender Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

(4 Punkte)