



## ÜBUNGSBLATT 13

### Vorlesung Analysis I\*, WS 2007/08

Abgabe am 06.02.2008 vor der Vorlesung (um 13 Uhr)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe  
<http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis1.html>

**Aufgabe 1.** Die Bernoulli-Zahlen  $B_n$  wurden in der Vorlesung definiert.

- (a) Berechnen Sie die ersten acht Bernoulli-Zahlen.
- (b) Zeigen Sie durch Untersuchung der Funktion

$$f(z) := \frac{z}{e^z - 1} - B_1 z,$$

dass  $B_{2j} = 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Potenzreihen von  $\tan$  und  $\tanh$ . Benutzen Sie dazu die Identitäten

- (a)  $\tan(z) = \cot(z) - 2 \cot(2z)$ ,
- (b)  $-\tanh(z) = \coth(z) - 2 \coth(2z)$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie durch direkte Anwendung der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition, dass die folgenden Funktionen an allen Punkten des Definitionsbereiches stetig sind:

- (a)  $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = ax + b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ ,
- (c)  $[0, +\infty) \ni x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \in [0, +\infty)$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 4.** Finden Sie alle reellen Punkte, an denen folgende Funktionen unstetig sind:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2, \\ 4 - x, & x \in (2, 5), \\ x - 6, & x > 5, \\ 0, & x = 5, \end{cases}$$

(b)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$ .

(c)  $f(x) = (x - 1) \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$ , wobei

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \frac{t}{|t|}, & t \neq 0. \end{cases}$$

**(6 Punkte)**