Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis II*, SS 2008

ÜBUNGSBLATT 1

Abgabe am 23.04.2008 vor der Vorlesung (bis 11.15 Uhr) Abgabe im Briefkasten neben dem Raum der Fachschaft (Rud25, Haus 3)

Aufgabe 1. In der Vorlesung wurden höhere Ableitungen definiert. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien f, g n-mal differenzierbar. Zeigen Sie, dass für $m \leq n$ gilt $f \cdot g$ gilt:

$$(f \cdot g)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt ist, das heisst, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Beweisen Sie die Ungleichungen

(a) $\ln(1 + x) \geq 1 - \frac{1}{1+x}$ für $x \geq 0$,

(b) $\frac{\sin(x)}{x} > \frac{2}{\pi}$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Berechnen Sie die ersten 4 nicht verschwindenden Glieder der Taylorentwicklung von arcsin um 0. Geben Sie anschließend die entsprechende Taylorformel für $\arcsin(x)$ inklusive Restglied an und schätzen Sie den Betrag des Restglieds ab.

(4 Punkte)

Bitte wenden →

Aufgabe 5. Der erweiterte Mittelwertsatz lautet: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar sind. Sei ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$, mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des erweiterten Mittelwertsatzes die Lagrangeformel für das Restglied der Taylorentwicklung.

[Hinweis: Betrachten Sie $F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$ und $G(x) = (x - a)^{k+1}$. Der erweiterte Mittelwertsatz muss dabei mehrfach angewendet werden.]

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis2.html