Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis II*, SS 2008

ÜBUNGSBLATT 4

Abgabe am 14.05.2008 vor der Vorlesung (bis 11.15 Uhr) im Briefkasten neben dem Raum der Fachschaft (Rud25, Haus 3)

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto 1/x$ in jedem Intervall (a, b) mit $a, b \in (0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist. Zeigen Sie, dass f in $(0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist. **(3 Punkte)**

Aufgabe 2. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn gilt, dass

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n(\epsilon) \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monoton wachsender Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. **(6 Punkte)**

Aufgabe 4. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Beweisen Sie, dass für jedes $0 < r < R$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| \leq r < R$ gleichmäßig konvergiert. **(4 Punkte)**

Aufgabe 5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \leq n \\ x - n & , \quad n < x \leq n+1 \\ n + 2 - x & , \quad n+1 < x < n+2 \\ 0 & , \quad x \geq n+2 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f_n punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert. **(3 Punkte)**

Zusatzaufgabe

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe ist freiwillig. Bei erfolgreicher Bearbeitung können bis zu 8 Punkte erworben werden. Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu Aufgabe 6 bis zum 28.05.08 im Büro von Herrn Hille ab. (Diese Lösungen werden gesondert korrigiert.)

Aufgabe 6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann die folgende Reihe gleichmäßig konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x \left(\frac{\sin\ nx}{nx}\right)^2 .$$

Gilt dies auch dann, wenn $a_n = 1$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(8 Punkte)

Wir wünschen viel Spass und Erfolg.

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis2.html